三角関数の微分 2

崎間@物理のかぎプロジェクト

2004-07-26

三角関数の微分 1 でイメージをとらえたので，今度は解析的に公式を導いてみます．それには導関数の定義

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

を使います．この定義から素直に考えるだけです．

sin 関数の導関数

導関数の定義において，$f(x)$ を $\sin(x)$ に置き換えると

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

です．ここからどうしたらいいでしょうか．三角関数に慣れている人なら，つぎの公式が思い浮かぶでしょう．

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

三角関数同士の足し算を積にする関係式です．微分積分の計算では，三角関数の足し算を積に変えたり，その逆をしてみるとうまくいくことが多いです．というわけで積の形に変形してみます．

$$\begin{aligned}\sin(x+h) - \sin(x) &= 2\cos\frac{(x+h)+(x)}{2}\sin\frac{(x+h)-(x)}{2} \\ &= 2\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2} \\ &= 2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}\end{aligned}$$

したがって，導関数の定義の式は

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

となり，分子が積の形になりました．分母分子を 2 で割ると

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}} \\
&= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}} \\
&= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}}
\end{aligned}
$$

ここで $h \to 0$ の極限にもって行けば導関数が得られます．$h \to 0$ のとき $\dfrac{h}{2} \to 0$ になるのはいいですよね．分子がゼロになるのだから分数全体でもゼロです．ですから

$$
\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = \cos(x)
$$

です．sin の方の極限ですが,

$$
\lim_{h\to 0}\frac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}} = 1
$$

となるのは良いでしょうか．この証明ははさみうちの方法で行いますが，ここでは公式として使います．以上より

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin(x) &= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}} \\
&= \cos(x)\cdot 1 \\
&= \cos(x)
\end{aligned}
$$

となり，$\sin(x)$ の導関数が $\cos(x)$ であることが導かれました．

cos 関数の導関数

cos 関数の導関数も同様の方法で導くことができます．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\cos(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\sin\dfrac{h}{2}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-\sin\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}}\\ &= -\sin(x)\cdot 1\\ &= -\sin(x)\end{aligned}$$

したがって，$\cos(x)$ の導関数が $-\sin(x)$ であることが導かれました．

2 階微分したらどうなる？

三角関数の導関数は重要な性質をもちます．それは，2 階微分すると関数の形は変わらず，符号だけ反転するという性質です．つまり，

$$\frac{d^2}{dx^2}\sin(x) = \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$$
$$\frac{d^2}{dx^2}\cos(x) = \frac{d}{dx}\{-\sin(x)\} = -\cos(x)$$

ということです．実数の範囲では，このような性質をもつ関数は三角関数だけです．この性質により，三角関数は単振動の方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

の解になっています．上式に $x=\sin(\omega t)$, $x=\cos(\omega t)$ を代入して計算すると両辺が等しくなるので，確かに解（特解）になっていることが確認できます．