フーリエ変換の実例

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2009-10-09

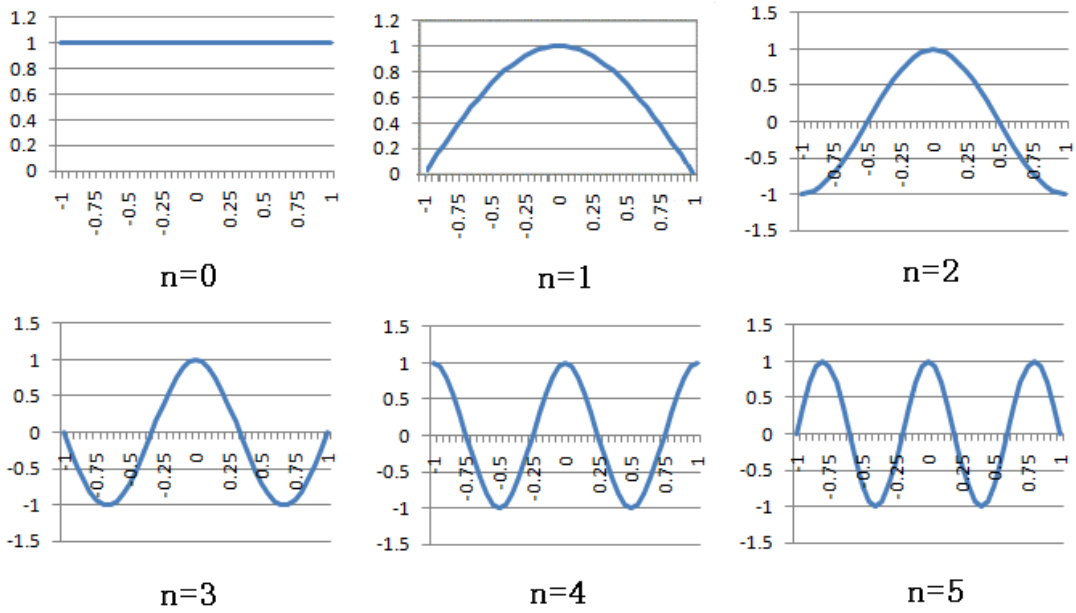
この記事では，フーリエ変換，フーリエ逆変換の実例について書いてみました．

フーリエ変換

これから

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & (t < -1) \\ \cos \frac{n\pi}{2} t & (-1 \leq t < 1) \\ 0 & (1 \leq t) \end{cases} \tag{1}$$

（ただし n は非負の整数）のフーリエ変換を求めます．その前に関数の形を確認しておきましょう．



フーリエ変換の公式は,

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}f(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \end{aligned} \tag{2}$$

フーリエ逆変換もついでに書いておくと,

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{F}^{-1}F(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \end{aligned} \tag{3}$$

です.

さっそく，フーリエ変換を考えてみましょう．簡単の為，$\alpha \equiv \frac{n\pi}{2}$ としておきます.

$$\begin{aligned} F_n(\omega) &= \mathcal{F}f_n(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{-1}^{1} \cos(\frac{n\pi}{2}t)e^{-i\omega t}dt \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t})e^{-i\omega t}dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{i(\alpha-\omega)t} + e^{-i(\alpha+\omega)t}dt \\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{e^{i(\alpha-\omega)t}}{i(\alpha-\omega)} - \frac{e^{-i(\alpha+\omega)t}}{i(\alpha+\omega)}\Big]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{2i}\Big[\frac{(\alpha+\omega)e^{i(\alpha-\omega)t} - (\alpha-\omega)e^{-i(\alpha+\omega)t}}{\alpha^2-\omega^2}\Big]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{2i(\alpha^2-\omega^2)}\big\{(\alpha+\omega)\big(e^{i(\alpha-\omega)} - e^{-i(\alpha-\omega)}\big) - (\alpha-\omega)\big(e^{-i(\alpha+\omega)} - e^{i(\alpha+\omega)}\big)\big\} \\ &= \frac{1}{\alpha^2-\omega^2}\big\{(\alpha+\omega)\frac{e^{i(\alpha-\omega)} - e^{-i(\alpha-\omega)}}{2i} + (\alpha-\omega)\frac{e^{i(\alpha+\omega)} - e^{-i(\alpha+\omega)}}{2i}\big\} \\ &= \frac{1}{\alpha^2-\omega^2}\big\{(\alpha+\omega)\sin(\alpha-\omega) + (\alpha-\omega)\sin(\alpha+\omega)\big\} \\ &= \frac{1}{\alpha^2-\omega^2}\big\{\alpha(\sin(\alpha-\omega) + \sin(\alpha+\omega)) + \omega(\sin(\alpha-\omega) - \sin(\alpha+\omega))\big\} \\ &= \frac{1}{\alpha^2-\omega^2}\big(2\alpha\sin\alpha\cos\omega - 2\omega\cos\alpha\sin\omega\big) \\ &= \frac{1}{(\frac{n\pi}{2})^2-\omega^2}\big(n\pi\sin\frac{n\pi}{2}\cos\omega - 2\omega\cos\frac{n\pi}{2}\sin\omega\big) \end{aligned} \tag{4}$$

ここで，$n : odd$ を n が奇数の時，$n : even$ を n が偶数の時とすると,

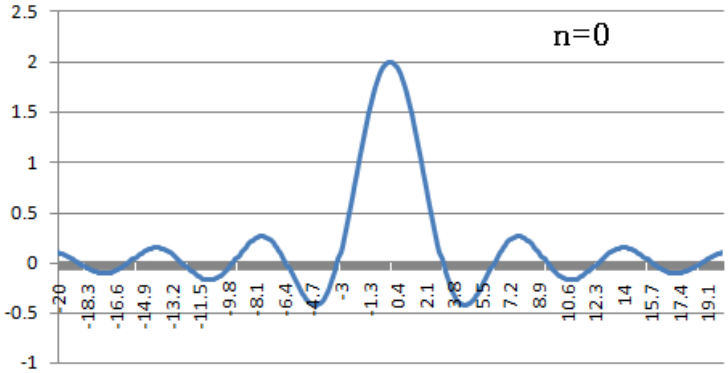
$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} & (n : odd) \\ 0 & (n : even) \end{cases} \tag{5}$$

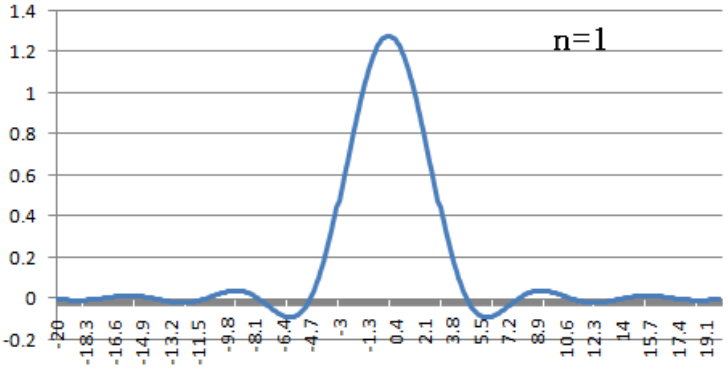
$$\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & (n : odd) \\ (-1)^{n/2} & (n : even) \end{cases} \tag{6}$$

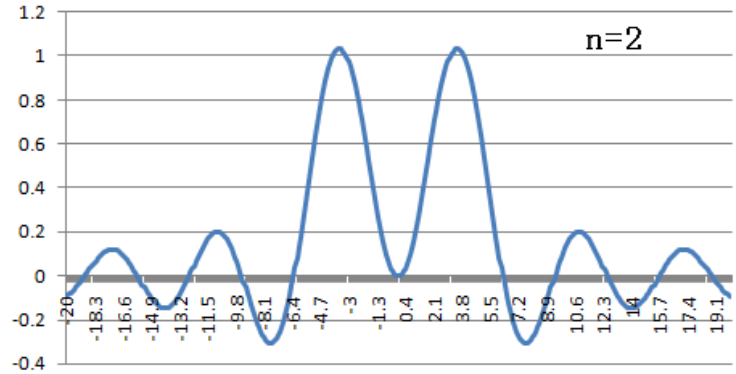
なので,

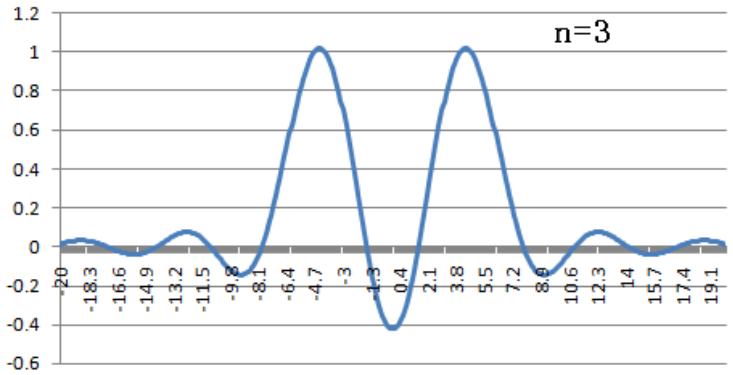
$$
\begin{aligned}
F_n(\omega) &= \begin{cases} \frac{1}{(\frac{n\pi}{2})^2-\omega^2}(-1)^{(n-1)/2} n\pi\cos\omega & (n:odd) \\ \frac{1}{(\frac{n\pi}{2})^2-\omega^2}(-1)^{(n-2)/2} 2\omega\sin\omega & (n:even) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\omega^2-(\frac{n\pi}{2})^2}(-1)^{(n+1)/2} n\pi\cos\omega & (n:odd) \\ \frac{1}{\omega^2-(\frac{n\pi}{2})^2}(-1)^{n/2} 2\omega\sin\omega & (n:even) \end{cases}
\end{aligned} \tag{7}
$$

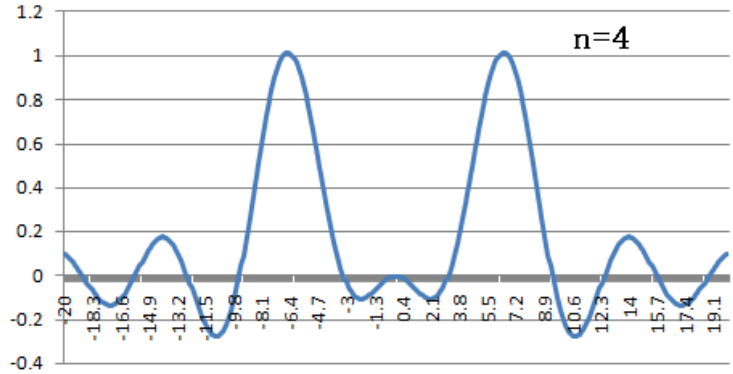
となりました．これが，関数 $f_n(t)$ のフーリエ変換です．$n \neq 0$ の時は，$\omega = \pm\frac{n\pi}{2}$ で極（分母がゼロになり，発散すること）が出てきそうですが，$\omega^2 - (\frac{n\pi}{2})^2 = (\omega - \frac{n\pi}{2})(\omega + \frac{n\pi}{2})$ というように一次の極なのと，ちょうど，そこでサインないしコサインが一次の零点をもつので，これは，除去可能な特異点です．よって，そこでは緩やかなピークを持ちます．実は，$n = 0$ の時の $t = 0$ も除去可能な特異点です．（ $2\omega\sin\omega$ が二次の零点のため，分母が 2 次の極を持つが，やはり除去可能な特異点となる.）下にフーリエ変換したもののグラフを書きます．横軸は，ω です．

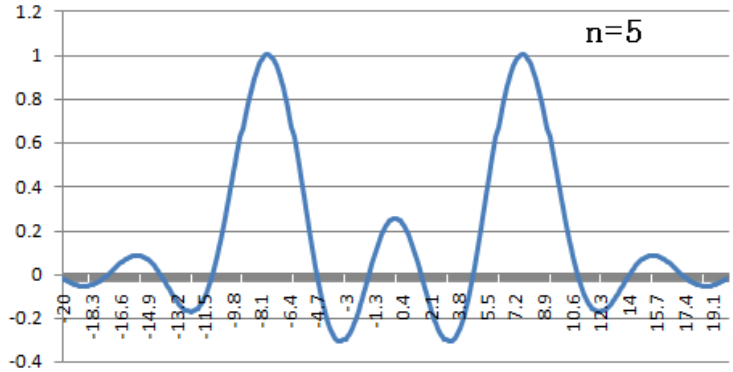


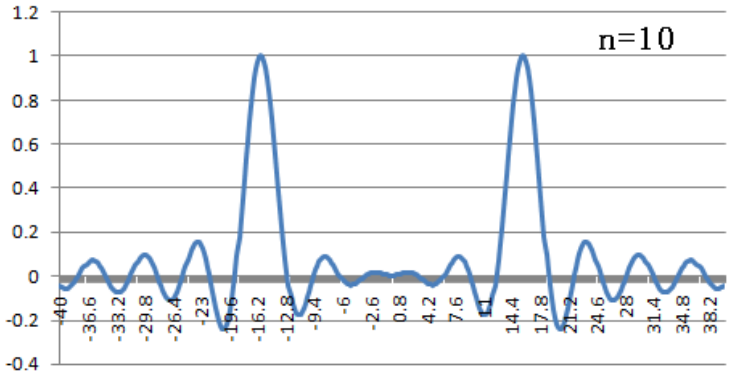


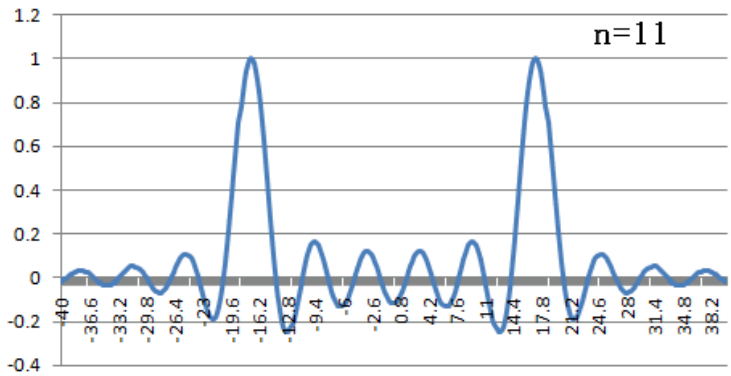



n=3
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-20
-18.3
-16.6
-14.9
-13.2
-11.5
-9.8
-8.1
-6.4
-4.7
-3
-1.3
0.4
2.1
3.8
5.5
7.2
8.9
10.6
12.3
14
15.7
17.4
19.1


n=4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-20
-18.3
-16.6
-14.9
-13.2
-11.5
-9.8
-8.1
-6.4
-4.7
-3
-1.3
0.4
2.1
3.8
5.5
7.2
8.9
10.6
12.3
14
15.7
17.4
19.1


n=5
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-20
-18.3
-16.6
-14.9
-13.2
-11.5
-9.8
-8.1
-6.4
-4.7
-3
-1.3
0.4
2.1
3.8
5.5
7.2
8.9
10.6
12.3
14
15.7
17.4
19.1


n=10
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-40
-35.6
-33.2
-29.8
-26.4
-23
-19.6
-15.2
-12.8
-9.4
-6
-2.6
0.8
4.2
7.6
11
14.4
17.8
21.2
24.6
28
31.4
34.8
38.2

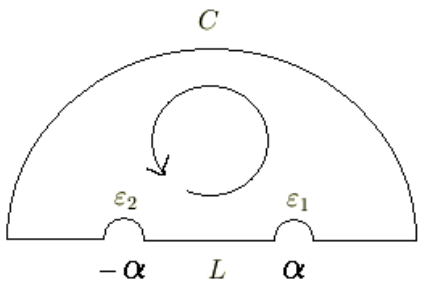


フーリエ逆変換（nが奇数の時）

さて，フーリエ変換ができたところで，フーリエ逆変換を行い，元に戻るか見てみましょう．複素関数の積分法を必要とします．まず，n が奇数のとき，かつ，$t+1 \geq 0$ つまり，$-1 \leq t$ の時[*1] を積分してみます．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}F_n(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_n(\omega)e^{i\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)/2}n\pi}{\omega^2-\alpha^2}\cos\omega e^{i\omega t}d\omega \\
&= \frac{n(-1)^{(n+1)/2}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega}{\omega^2-\alpha^2}e^{i\omega t}d\omega \\
&= c\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega}{\omega^2-\alpha^2}e^{i\omega t}d\omega \\
&= c\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega}+e^{-i\omega}}{2(\omega^2-\alpha^2)}e^{i\omega t}d\omega \\
&= \frac{c}{2}\Big\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega}}{(\omega^2-\alpha^2)}e^{i\omega t}d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega}}{(\omega^2-\alpha^2)}e^{i\omega t}d\omega\Big\} \\
&= \frac{c}{2}(I_n + I_n') \qquad (8)
\end{aligned}
$$

ただし，$c = \frac{n(-1)^{(n+1)/2}}{2}$ としました．I_n は下図のような積分路をとれば求められます．



[*1] t+1 がゼロ以上という条件は，後述の式 (10) の指数関数の指数 $-R(t+1)\sin\theta$ が複素平面の上半面で負になり，積分路 C での積分がゼロになるように選びました．

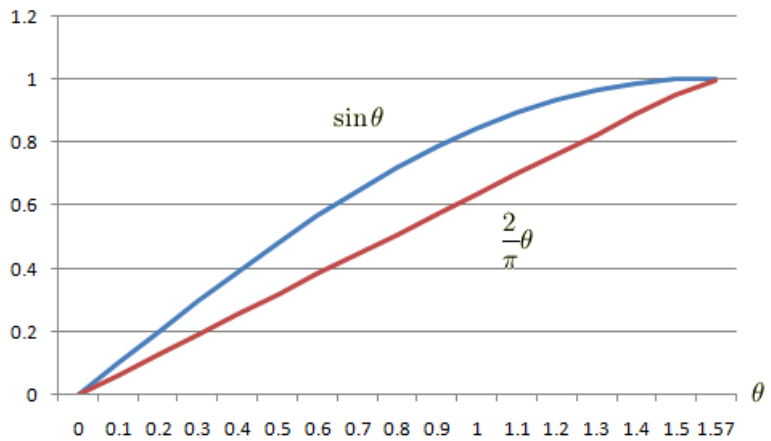
積分路が囲む領域に特異点がないので，以下の様な積分となります．

$$\left(\int_C+\int_L+\int_{\varepsilon_1}+\int_{\varepsilon_2}\right)\frac{e^{i(t+1)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega=0 \tag{9}$$

ここで積分路 C を計算します．$\omega=Re^{i\theta}$ と置くと，$d\omega=iRe^{i\theta}d\theta$ となるから，

$$\begin{aligned}\left|\int_C\frac{e^{i(t+1)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega\right|&=\left|\int_0^\pi\frac{e^{i(1+t)R(\cos\theta+i\sin\theta)}}{R^2e^{2i\theta}-\alpha^2}iRe^{i\theta}d\theta\right|\\&<\frac{R}{R^2-\alpha^2}\int_0^\pi e^{-R(t+1)\sin\theta}d\theta\\&<\frac{R}{R^2-\alpha^2}\int_0^\pi e^{-2R(t+1)\theta/\pi}d\theta\\&<\frac{R}{R^2-\alpha^2}\left[\frac{-\pi}{2R(t+1)}e^{-2R(t+1)\theta/\pi}\right]_0^\pi\\&=\frac{\pi}{2(t+1)(R^2-\alpha^2)}(1-e^{-2R(1+t)})\\&\overset{R\to\infty}{\longrightarrow}0\end{aligned} \tag{10}$$

一行目から二行目は，位相部分を無視して，分母は最小になるように展開しました．二行目から三行目は，下図の様に $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ において，$\sin\theta\ge\frac{2}{\pi}\theta$ となることを利用しました．



積分路 ε_1 については，その留数に時計回りなのでマイナスが掛かって，更に半周しかしないので 2π ではなく π が掛かって，

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon_1}\frac{e^{i(t+1)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega&=-i\pi\mathrm{Res}_{\omega\to\alpha}\left[\frac{e^{i(t+1)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}\right]\\&=-i\pi\lim_{\omega\to\alpha}(\omega-\alpha)\frac{e^{i(1+t)\omega}}{(\omega-\alpha)(\omega+\alpha)}\\&=-i\pi\frac{e^{i(1+t)\alpha}}{2\alpha}\end{aligned} \tag{11}$$

積分路 ε_2 についても同様に，

$$\int_{\varepsilon_2}\frac{e^{i(t+1)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega=i\pi\frac{e^{-i(1+t)\alpha}}{2\alpha} \tag{12}$$

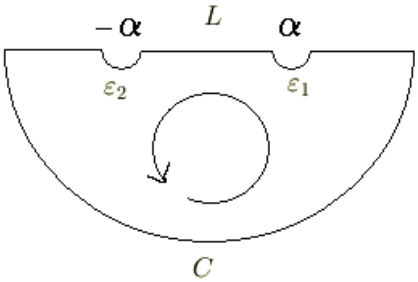
よって，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(1+t)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}\omega &= \int_L \frac{e^{i(t+1)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega \\ &= \Big(-\int_C-\int_{\varepsilon_1}-\int_{\varepsilon_2}\Big)\frac{e^{i(t+1)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega \\ &= i\pi\frac{e^{i(1+t)\alpha}}{2\alpha}-i\pi\frac{e^{-i(1+t)\alpha}}{2\alpha} \\ &= -\frac{\pi}{\alpha}\frac{e^{i(1+t)\alpha}-e^{-i(1+t)\alpha}}{2i} \\ &= -\frac{\pi}{\alpha}\sin((1+t)\alpha) \end{aligned} \tag{13}$$

となります．これはつまり，$\alpha=\frac{n\pi}{2}$ $c=\frac{n(-1)^{(n+1)/2}}{2}$ でしたから，

$$\begin{aligned} I_n &= c\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega}}{\omega^2-\alpha^2}e^{i\omega t}d\omega \\ &= -\frac{n(-1)^{(n+1)/2}}{2}\frac{\pi}{\alpha}\sin((1+t)\alpha) \\ &= \frac{n(-1)^{(n-1)/2}}{2}\frac{\pi}{\alpha}\sin((1+t)\frac{n\pi}{2}) \\ &= \frac{n\pi(-1)^{(n-1)/2}}{2\alpha}(-1)^{(n-1)/2}\cos(\frac{n\pi}{2}t) \\ &= \cos(\frac{n\pi}{2}t) \end{aligned} \tag{14}$$

次に行きましょう．次は，n が奇数，かつ，$t+1<0$ つまり，$t<-1$ の時です．積分路は，無限遠の半円について，$e^{-\sin(t+1)\theta}$ の指数が負になる領域 $\pi\le\theta\le 2\pi$ より，下半面（下図参照）になります．



これは留数の積分方向は変わらず，積分路 L の向きだけが変わるので，

$$I_n = -\cos(\frac{n\pi}{2}t) \tag{15}$$

となります．よって，まとめると，

$$I_n = \begin{cases} -\cos(\frac{n\pi}{2}t) & (t\le -1) \\ \cos(\frac{n\pi}{2}t) & (-1\le t) \end{cases} \tag{16}$$

今求めたのは

$$I_n = \frac{n(-1)^{(n+1)/2}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega}}{\omega^2-\alpha^2}e^{i\omega t}d\omega \tag{17}$$

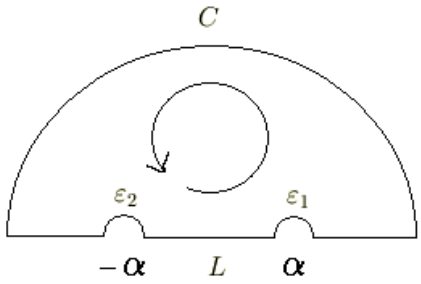
でしたが，一方，

$$I'_n = \frac{n(-1)^{(n+1)/2}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega}}{\omega^2-\alpha^2}e^{i\omega t}d\omega \tag{18}$$

も求めないと，

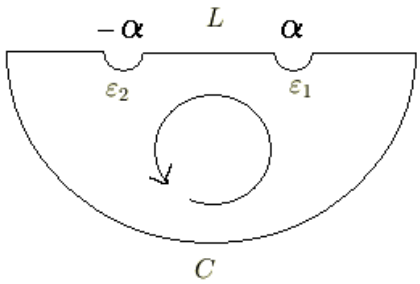
$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}F_n(\omega) &= \frac{1}{2}(I_n + I'_n)\\ &= \frac{n(-1)^{(n+1)/2}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(e^{i\omega}+e^{-i\omega})}{2(\omega^2-\alpha^2)}e^{i\omega t}d\omega\\ &= \frac{n(-1)^{(n+1)/2}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega}{\omega^2-\alpha^2}e^{i\omega t}d\omega \end{aligned}\tag{19}$$

は求まりません．よって，求めます．n が奇数，かつ $t-1\geq 0$，つまり，$t\geq 1$ の時，積分路は下図のようになって，



$$\begin{aligned}I'_n &= \frac{n(-1)^{(n+1)/2}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega}}{\omega^2-\alpha^2}e^{i\omega t}d\omega\\ &= c\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(t-1)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega\\ &= c\frac{\pi}{\alpha}\sin(t-1)\alpha\\ &= \frac{n\pi(-1)^{(n-1)/2}}{2\alpha}\sin(\frac{n\pi}{2}t-\frac{n\pi}{2})\\ &= -\cos\frac{n\pi}{2}t \end{aligned}\tag{20}$$

さっきと同様に，n が奇数，かつ $t-1<0$，つまり，$t<1$ の時，積分路は下図のようになり，式 (20) とは，符号が変わるので，

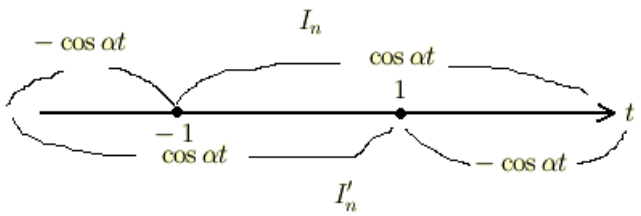


$$I'_n = \cos\frac{n\pi}{2}t \tag{21}$$

つまり，

$$I'_n = \begin{cases} \cos(\frac{n\pi}{2}t) & (t < 1) \\ -\cos(\frac{n\pi}{2}t) & (1 \leq t) \end{cases} \tag{22}$$

よって，まとめると下図のようになります．



つまり，

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}F_n(\omega) &= \frac{1}{2}(I_n + I'_n) \\ &= \begin{cases} 0 & (t < -1) \\ \cos(\frac{n\pi}{2}t) & (-1 \leq t < 1) \\ 0 & (1 \leq t) \end{cases} \end{aligned} \tag{23}$$

ふぅ，これで逆変換の内，n が奇数の時を求めることができました．次は偶数の時です，頑張りましょう．

フーリエ逆変換（nが偶数の時）

さて，n が偶数，かつ $-1 \leq t$ の時，$f_n(t)$ のフーリエ変換は，

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f_n(t) &= F_n(\omega) \\ &= \frac{2}{\omega^2 - (\frac{n\pi}{2})^2}(-1)^{n/2}\omega\sin\omega \end{aligned}$$

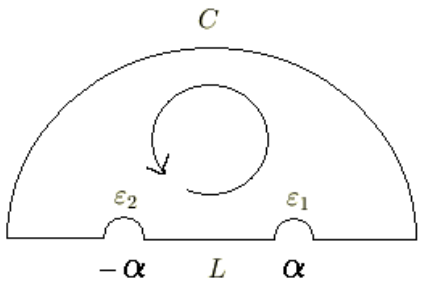
でした．今求めたいのは，$d = \frac{2(-1)^{n/2}}{2\pi} = \frac{(-1)^{n/2}}{\pi}$ と置いて，

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}F_n(\omega) &= \frac{1}{2\pi}F_n(\omega)d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2(-1)^{n/2}\omega\frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i}e^{i\omega t}d\omega \\ &= \frac{2(-1)^{n/2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\frac{e^{i\omega}}{2i}e^{i\omega t}d\omega - \frac{2(-1)^{n/2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\frac{e^{-i\omega}}{2i}e^{i\omega t}d\omega \\ &= d\int_{-\infty}^{\infty}\omega\frac{e^{i\omega}}{2i}e^{i\omega t}d\omega - d\int_{-\infty}^{\infty}\omega\frac{e^{-i\omega}}{2i}e^{i\omega t}d\omega \\ &= \frac{I_n - I'_n}{2i} \end{aligned}$$

まず，I_n を求めましょう．

$$
\begin{aligned}
I_n &= d\int_{\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2-(\frac{n\pi}{2})^2}\omega e^{i\omega}e^{i\omega t}d\omega \\
&= d\int_{\infty}^{\infty} \frac{\omega e^{i\omega}}{\omega^2-\alpha^2}e^{i\omega t}d\omega
\end{aligned} \tag{24}
$$

となります．下図のように積分路を取ると，



$$
\left(\int_L+\int_C+\int_{\varepsilon_1}+\int_{\varepsilon_2}\right)\frac{\omega e^{i\omega}}{\omega^2-\alpha^2}e^{i\omega t}d\omega=0
$$

となります．まず，積分路 C を評価します．$\omega = Re^{i\theta}$ と置けば，$d\omega = iRe^{i\theta}d\theta$ より，

$$
\begin{aligned}
\left|\int_C \frac{\omega e^{i\omega}}{\omega^2-\alpha^2}e^{i\omega t}d\omega\right| &= \left|\int_C \frac{\omega e^{i(1+t)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega\right| \\
&= \left|\int_0^{\pi} \frac{Re^{i\theta}e^{iR(1+t)(\cos\theta+i\sin\theta)}}{R^2e^{2i\theta}-\alpha^2}iRe^{i\theta}d\theta\right| \\
&\leq \int_0^{\pi} \frac{R^2}{R^2-\alpha^2}e^{-R\sin\theta}\theta \\
&\leq \int_0^{\pi} \frac{R}{R^2-\alpha^2}e^{-2R\theta/\pi}\theta \\
&= \frac{R^2}{R^2-\alpha}\frac{-\pi}{2R}(e^{-2R}-e^0) \\
&= \frac{\pi R^2}{2R(R^2-\alpha^2)}(1-e^{-2R}) \\
&\overset{R\to\infty}{\to} 0
\end{aligned} \tag{25}
$$

積分路 ε_1 について，前と同じく時計回りで半周することから留数に $-i\pi$ を掛けたものが，積分値となります．

$$
\begin{aligned}
\int_{\varepsilon_1} \frac{\omega e^{i(1+t)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega &= -i\pi\mathrm{Res}_{\omega\to\alpha}\frac{\omega e^{i(1+t)\omega}}{\omega^2-\alpha^2} \\
&= -i\pi\lim_{\omega\to\alpha}(\omega-\alpha)\frac{\omega e^{i(1+t)\omega}}{(\omega-\alpha)(\omega+\alpha)} \\
&= -i\pi\frac{\alpha e^{i(1+t)\alpha}}{2\alpha} \qquad = \frac{-i\pi}{2}e^{i(1+t)\alpha}
\end{aligned} \tag{26}
$$

同様に，積分路 ε_2 も求めると，

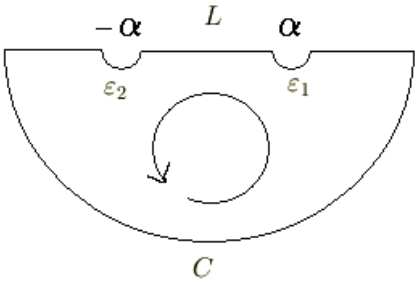
$$
\int_{\varepsilon_1} \frac{\omega e^{i(1+t)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega = \frac{-i\pi}{2}e^{-i(1+t)\alpha} \tag{27}
$$

よって，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega e^{i(1+t)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega &= \int_L \frac{\omega e^{i(1+t)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega \\ &= \Big(-\int_C-\int_{\varepsilon_1}-\int_{\varepsilon_2}\Big)\frac{\omega e^{i(1+t)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega \\ &= \frac{i\pi}{2}(e^{i(1+t)\alpha}+e^{-i(1+t)\alpha}) \\ &= i\pi\cos(1+t)\alpha \\ &= i\pi(-1)^{n/2}\cos(\frac{n\pi}{2}t) \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} I_n &= d\int_{\infty}^{\infty}\frac{\omega e^{i(1+t)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega \\ &= \frac{(-1)^{n/2}}{\pi}\int_{\infty}^{\infty}\frac{\omega e^{i(1+t)\omega}}{\omega^2-\alpha^2}d\omega \\ &= \frac{(-1)^{n/2}}{\pi}i\pi(-1)^{n/2}\cos(\frac{n\pi}{2}t) \\ &= i\cos(\frac{n\pi}{2}t) \end{aligned} \tag{29}$$

となります．同様に，n が偶数，かつ $t<-1$ の時，積分路は下図のようになります．



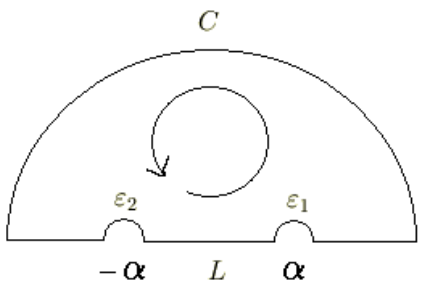
ここでも，留数の積分方向は変わらず，積分路 L の向きが変わるので，

$$I_n = -i\cos(\frac{n\pi}{2}t) \tag{30}$$

よって，まとめると，

$$I_n = \begin{cases} -i\cos(\frac{n\pi}{2}t) & (t<-1) \\ i\cos(\frac{n\pi}{2}t) & (-1\le t) \end{cases} \tag{31}$$

次に，n が偶数，かつ，$0\le t-1$ つまり $1\le t$ の時，I'_n を求めます．$d=\frac{(-1)^{n/2}}{\pi}$ として，積分路は下図のようになり，

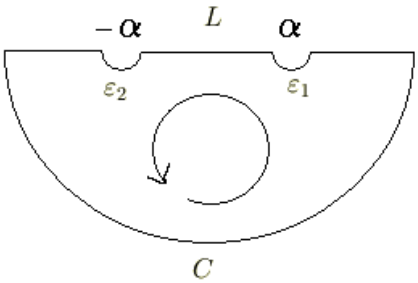


$$
\begin{aligned}
I'_n &= d\int_{\infty}^{\infty} \frac{\omega e^{i(t-1)\omega}}{\omega^2-\alpha^2} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} \frac{2}{\omega^2-(\frac{n\pi}{2})^2}(-1)^{n/2}\omega e^{-i\omega}e^{i\omega t} d\omega
\end{aligned} \tag{32}
$$

を考えます．これが最後ですので，安心してください．これは，式 (28) の下から二行目の $(1+t)$ を $(t-1)$ で置き換えたものに等しいので，

$$
\begin{aligned}
I'_n &= \frac{(-1)^{n/2}}{\pi} i\pi \cos((t-1)\alpha) \\
&= i(-1)^{n/2}(-1)^{n/2}\cos(\frac{n\pi}{2}t) \\
&= i\cos(\frac{n\pi}{2}t)
\end{aligned} \tag{33}
$$

同様に，n が偶数の時，かつ，$t-1<0$ つまり $t<1$ の時，積分路は下図のようになって，積分路 L の向きが反転するので，



$$
\begin{aligned}
I'_n &= \frac{(-1)^{n/2}}{\pi}(-i\pi)\cos((1-t)\alpha) \\
&= -i(-1)^{n/2}(-1)^{n/2}\cos(\frac{n\pi}{2}t) \\
&= -i\cos(\frac{n\pi}{2}t)
\end{aligned} \tag{34}
$$

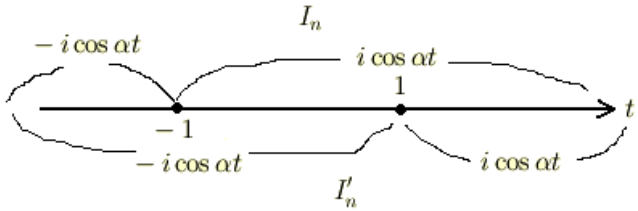
よって，まとめると，

$$
I'_n = \begin{cases} -i\cos(\frac{n\pi}{2}t) & (t<1) \\ i\cos(\frac{n\pi}{2}t) & (1\le t) \end{cases} \tag{35}
$$

となります．いよいよ最後の仕上げです．$-1 \leq t < 1$ の時，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}F_n(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2(-1)^{n/2}\frac{\omega}{\omega^2-\alpha^2}\frac{e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{2i}e^{i\omega t}d\omega \\
&= \frac{I_n - I_n'}{2i} \\
&= \frac{i\cos(\frac{n\pi}{2}t) - (-i\cos(\frac{n\pi}{2}t))}{2i} \\
&= \frac{2i\cos(\frac{n\pi}{2}t)}{2i} \\
&= \cos(\frac{n\pi}{2}t)
\end{aligned} \tag{36}
$$

さらに，t が $-1 \leq t < 1$ 以外の時は，$\mathcal{F}^{-1}F_n(\omega) = 0$ となるので，まとめると（下図も参照のこと），



$$
\mathcal{F}^{-1}F_n(\omega) = \begin{cases} 0 & (t < -1) \\ \cos(\frac{n\pi}{2}t) & (-1 \leq t < 1) \\ 0 & (1 \leq t) \end{cases} \tag{37}
$$

よって，ついに今回の例において，ある関数 $f_n(t)$ のフーリエ変換 $F_n(\omega)$ のフーリエ逆変換が，元の関数 $f(t)$ に等しいことが分かりました．今日はこの辺で，それでは．