

ミンコフスキー空間上の微分形式

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-11-13

この記事では、相対性理論などに使われるミンコフスキー空間という空間上での微分形式を考えてみます。立派な名前がついていますが、どんな空間なのかと言えば、四次元空間です。特徴として、座標基底の中に計量が負になるものが一つあります。このような場合、[ホッジ作用素](#)の取り方に注意が必要でした。([ホッジ作用素](#) や [p-ベクトルの内積](#) の記事中にもミンコフスキー空間に関する注意を書いていますので、参照下さい。) もう一度、ホッジ作用素の定義を思い出しましょう。 R^n 上の p 次微分形式の基底を σ^H とすると、 $*\sigma^H$ は $\wedge^{n-p}R^n$ の基底 σ^K となります。

$$\sigma^H = (\sigma^K, \sigma^K)\sigma^K \quad (1)$$

ただし、 $\sigma^H \wedge \sigma^K$ は、ボリュウムフォームの基底の偶順列だとします。(これらは全て既習の内容なので、少し説明を端折っています。訳が分からないという人は、[ホッジ作用素](#)の内容をもう一度よく復習して下さい。) 式(1)で問題なのは、右辺の (σ^K, σ^K) という内積です。ミンコフスキー空間の正規直交基底を $\{e_1, e_2, e_3, e_t\}$ とすると、最初の三つは、普通のユークリッド空間でお馴染みの基底ですが、四番目の e_t が例の、計量が負になる基底になります。基底の内積は次のようになります。

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1-1)$$

$$e_i \cdot e_t = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1-2)$$

$$e_t \cdot e_t = -1 \quad (1-3)$$

式(1-1)(1-2)は正規直交基底の定義として、よく知っているものです。式(1-3)が特徴的です。このような計量をローレンツ計量と呼びます。このため、例えば $\sigma^K = e_1 \wedge e_2$ の場合と、 $\sigma^K = e_1 \wedge e_t$ の場合では、内積 (σ^K, σ^K) が異なってきます。[p-ベクトルの内積](#)に従って、計算してみましょう。

$$\begin{aligned} (e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_2) &= \begin{vmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (2-1)$$

$$\begin{aligned}
 (e_1 \wedge e_t, e_1 \wedge e_t) &= \begin{vmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_t \\ e_t \cdot e_1 & e_t \cdot e_t \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= -1
 \end{aligned} \tag{2-2}$$

どうやら、 e_t が混ざっていると -1 になるようです。以上の議論を念頭に置きつつ、次のセクションではミンコフスキー空間上の微分形式を考えてみます。四次元の微分形式とも、後で比べてみてください。

ミンコフスキー空間上の微分形式

一次微分形式の基底を (dx, dy, dz, cdt) とします。dt の前についている c が妙ですが、これは単なる定数です。気にしないで下さい ($\cdot w \cdot$)。空間の向きを $dx dy dz cdt$ という順列に決めましょう。このとき、ホッジ作用素の写像の仕方に注意が必要です。前セクションの議論により、 cdt が右辺に出て来る写像には、 (-1) が掛かってきます。

$$*(dx \wedge dy \wedge dz) = -cdt \tag{3-1}$$

$$*(dy \wedge dz \wedge cdt) = dx \tag{3-2}$$

$$*(dz \wedge cdt \wedge dx) = dy \tag{3-3}$$

$$*(cdt \wedge dx \wedge dy) = dz \tag{3-4}$$

さらに、二次微分形式の基底のホッジ作用素も考えてみましょう。できれば、式 (1) の定義通りに計算して、これらの関係を一度自分で確認してみてください。

$$*(dx \wedge dy) = -dz \wedge cdt \tag{4-1}$$

$$*(dy \wedge dz) = -dx \wedge cdt \tag{4-2}$$

$$*(dz \wedge dx) = -dy \wedge cdt \tag{4-3}$$

$$*(dx \wedge cdt) = dy \wedge dz \tag{4-4}$$

$$*(dy \wedge cdt) = dz \wedge dx \tag{4-5}$$

$$*(dz \wedge cdt) = dx \wedge dy \tag{4-6}$$

ここで、式 (3)(4) で用いた基底の並びは、全て $(dx dy dz cdt)$ という順列の偶順列になっていますので、右辺に出てきたマイナスは、ひとえに cdt 軸の計量が負であるという事情だけによるものです。 $(i j k)$ を

(1 2 3) の偶順列とし, x, y, z を x^1, y^2, z^3 と表現することにすれば, 式 (3)(4) をまとめて次のように略記することも出来ます .

$$*(dx^i \wedge cdt) = dx^j \wedge dx^k \quad (5-1)$$

$$*(dx^j \wedge dx^k) = -dx^i \wedge cdt \quad (5-2)$$

ミンコフスキー空間上の微分形式などという変チクリなものを考えた理由は, 電磁気学の基礎方程式とも言えるマクスウェルの方程式を, 微分形式を使って美しく記述したいという動機によるものです . 本当に美しく簡単な形にまとまりますので, 純粋に美学的・審美的観点からもぜひ眺めてみて欲しいものですし, そのあまりにも単純な形から, (特に幾何学的な考察によって) 電磁気学をより深く理解する一助ともなることでしょう . ミンコフスキー空間上の微分形式によるマクスウェル方程式の定式化は, [次](#) の記事で考えます .

ミンコフスキー

ミンコフスキー空間にその名を残すミンコフスキー (Hermann Minkowski (1864-1909)) は, 現在のリトアニア (当時はロシア帝国領) に生まれました . 両親はドイツ人で, 一家もその後ドイツのケーニヒスベルグ (現在はロシアの飛び地) に引っ越していますので, ミンコフスキーはドイツ人だと考えた方が良さそうです . ミンコフスキーはケーニヒスベルグ大学へ進みますが, 数学の才能は抜きん出ているようです . ヒルベルト (David Hilbert (1862-1943)) は大学の級友で, また新任教官にはフルヴィッツ (Adolf Hurwitz (1859-1919)) がおり, 彼等とは親友とも言える間柄でした .

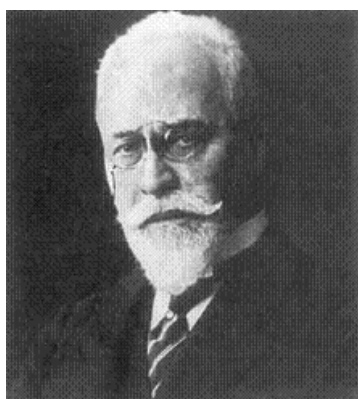


図1 アインシュタインが数学の重要性に目覚めたのは, ミンコフスキーのお陰だ .

後年, ミンコフスキーはボン, ケーニヒスベルグなどで職を得ますが, チューリッヒの *Eidgenössische Polytechnikum Zürich* で教鞭を取っていたときの学生にアインシュタイン (Albert Einstein (1879-1955)) がいます . 最後はヒルベルトの招きに応じてゲッチンゲン大学に落ち着き, 数学の研究に没頭します . ミンコフスキーの功績で何よりも有名なものは, ローレンツ (Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928)) とアインシュタインによる相対性理論を見事に記述する, ミンコフスキー空間という概念を数学的に洗練したことでしょう . ただし, ミンコフスキー自身の興味は純数

学的内容に向いており、二次形式や連分数法の研究に時間をかけています。また、「数の幾何学」という分野はミンコフスキーによって創始された、幾何学と整数論が合わさったような分野で、ミンコフスキーの凸型定理という定理は有名です。