rot の座標変換

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2010-01-10

ベクトル解析で出てくる rot（ローテーション，回転）は，他のデカルト座標系では果たして本当にベクトルとして振舞うのかを調べてみました．

前の記事は，div の座標変換不変性 です．次の記事は，grad の座標変換 です．

rot について基本的なこと

ベクトル $\boldsymbol{A}$ に対して, rot は以下のように表わされます．デカルト座標系 S の基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ とすると[*1],

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = &(\frac{\partial A_3}{\partial 2} - \frac{\partial A_2}{\partial 3})\boldsymbol{e}_1 \\ &+ (\frac{\partial A_1}{\partial 3} - \frac{\partial A_3}{\partial 1})\boldsymbol{e}_2 \\ &+ (\frac{\partial A_2}{\partial 1} - \frac{\partial A_1}{\partial 2})\boldsymbol{e}_3\end{aligned} \tag{1}$$

この式は，エディントンのイプシロンと呼ばれる次の記号を使うと簡単に書けます．

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (\mathrm{even}) \\ -1 & (\mathrm{odd}) \\ 0 & (\mathrm{the\ \ others}) \end{cases} \tag{2}$$

ただし，添え字が偶置換の時を (even)，奇置換の時を (odd) それ以外の 3 つの添え字の中に同じ数が入る時を (the　others) で表わしました．

大抵，この記号はアインシュタインの縮約という「同じ添え字について，和を取って S 記号を省略する」ルール[*2] と一緒に用いられます．

更に，例えば x に関する偏微分を，∂_1 などと書くことにします．すると，式 (1) は，

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k \boldsymbol{e}_i \tag{3}$$

[*1] ：この記事では添え字について，$1, 2, 3$ は，それぞれ x, y, z を表すものとします．

[*2] ：たとえば，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \sum_i A_i B_i = A_i B_i$ のように三次元ベクトルの内積を表します．

となります．簡潔ですね．これから，座標の変換を議論します．そこで，div の座標変換不変性 で用いたのと同じ変換行列 U を用います．

つまり，座標系 S のベクトル A_i と座標系 S' のベクトル A'_i について，実直交行列 U が存在して，次のように表わされます．

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_1 \\ \partial_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial'_1 \\ \partial'_2 \\ \partial'_3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

ここで，例えば式 (4) を書き直すと，

$$\boldsymbol{A} = A_i \boldsymbol{e}_i = u_{ih} A'_h \boldsymbol{e}'_i \tag{6}$$

成分を抜き出すと，

$$A_i = u_{ij} A'_j$$

となります．これが，ベクトルの（偏微分も一緒）変換則です．すると，今示したい変換は，

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\boldsymbol{A} &= (\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k) \boldsymbol{e}_i \\ &= u_{ih} (\varepsilon_{hlm} \partial'_l A'_m) \boldsymbol{e}'_i \end{aligned} \tag{7}$$

となります．これは，位置ベクトルの「成分」の変換と同様に振舞います[*3]．

本題

それでは準備が整いましたので，式 (7) の左辺を計算してみましょう．

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\boldsymbol{A} &= (\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k) \boldsymbol{e}_i \\ &= (\varepsilon_{ijk} u_{jl} \partial'_l u_{km} A'_m) \boldsymbol{e}'_i \end{aligned} \tag{8}$$

これから先は，成分を抜き出して考えていきます．

[*3] 「成分」とカギ括弧をつけたのは，基底ベクトルとは異なる変換をされるからです．詳しくは，ベクトルの基底の変換 をご覧ください．

例えば，第一成分（ x 方向の成分）を書き出すと，

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_1 &= \varepsilon_{123}\partial_2 A_3 + \varepsilon_{132}\partial_3 A_2 \\
&= \varepsilon_{123}(u_{21}\partial'_1 + u_{22}\partial'_2 + u_{23}\partial'_3)(u_{31}A'_1 + u_{32}A'_2 + u_{33}A'_3) \\
&+ \varepsilon_{132}(u_{31}\partial'_1 + u_{32}\partial'_2 + u_{33}\partial'_3)(u_{21}A'_1 + u_{22}A'_2 + u_{23}A'_3) \\
&= (u_{21}u_{32} - u_{31}u_{22})\partial'_1 A'_2 + (u_{21}u_{33} - u_{31}u_{23})\partial'_1 A'_3 \\
&+ (u_{22}u_{31} - u_{32}u_{21})\partial'_2 A'_1 + (u_{22}u_{33} - u_{32}u_{23})\partial'_2 A'_3 \\
&+ (u_{23}u_{31} - u_{33}u_{21})\partial'_3 A'_1 + (u_{23}u_{32} - u_{33}u_{22})\partial'_3 A'_2 \\
&= (u_{22}u_{33} - u_{32}u_{23})(\partial'_2 A'_3 - \partial'_3 A'_2) \\
&+ (u_{23}u_{31} - u_{33}u_{21})(\partial'_3 A'_1 - \partial'_1 A'_3) \\
&+ (u_{21}u_{32} - u_{31}u_{22})(\partial'_1 A'_2 - \partial'_2 A'_1)
\end{aligned} \tag{9}
$$

同様に第二，第三成分も書くと，

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_2 &= (u_{32}u_{13} - u_{12}u_{33})(\partial'_2 A'_3 - \partial'_3 A'_2) \\
&+ (u_{33}u_{11} - u_{13}u_{31})(\partial'_3 A'_1 - \partial'_1 A'_3) \\
&+ (u_{31}u_{12} - u_{11}u_{32})(\partial'_1 A'_2 - \partial'_2 A'_1)
\end{aligned} \tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_3 &= (u_{12}u_{23} - u_{22}u_{13})(\partial'_2 A'_3 - \partial'_3 A'_2) \\
&+ (u_{13}u_{21} - u_{23}u_{11})(\partial'_3 A'_1 - \partial'_1 A'_3) \\
&+ (u_{11}u_{22} - u_{21}u_{12})(\partial'_1 A'_2 - \partial'_2 A'_1)
\end{aligned} \tag{11}
$$

となります．

ここで，行列 U の余因子行列 $V = \tilde{U}$ を考えます．これは，逆行列 U^{-1} の $\det U$ 倍であり，以下のような形をしています．（ $\det U = 1$ です．）

$$
\begin{aligned}
V &= \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} \\
&= \tilde{U} \\
&= \begin{pmatrix}
\begin{vmatrix} u_{22} & u_{23} \\ u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} u_{12} & u_{13} \\ u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} u_{12} & u_{13} \\ u_{22} & u_{23} \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} u_{21} & u_{23} \\ u_{31} & u_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} u_{11} & u_{13} \\ u_{31} & u_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} u_{11} & u_{13} \\ u_{21} & u_{23} \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} u_{21} & u_{22} \\ u_{31} & u_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{31} & u_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}
\end{pmatrix} \\
&= (\det U)U^{-1} \\
&= U^{-1}
\end{aligned} \tag{12}
$$

$$
\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \quad v_{12} = -\begin{vmatrix} u_{12} & u_{13} \\ u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}
$$

余因子行列の(12)成分
添え字の入れ替わりに注意！！

今，行列 U は実直交行列なので，$U^{-1}=U^T$ （ ^{T} は転置を表す.）となっています．よって，

$$
\begin{aligned}
V &= \begin{pmatrix}
\begin{vmatrix} u_{22} & u_{23} \\ u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} u_{12} & u_{13} \\ u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} u_{12} & u_{13} \\ u_{22} & u_{23} \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} u_{21} & u_{23} \\ u_{31} & u_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} u_{11} & u_{13} \\ u_{31} & u_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} u_{11} & u_{13} \\ u_{21} & u_{23} \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} u_{21} & u_{22} \\ u_{31} & u_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{31} & u_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}
\end{pmatrix} \\
&= U^{-1} \\
&= U^T \\
&= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{13}
$$

となります．

式 (9) に式 (13) を代入すると，見事に，

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_1 &= (u_{22}u_{33} - u_{32}u_{23})(\partial'_2 A'_3 - \partial'_3 A'_2) \\
&\quad + (u_{23}u_{31} - u_{33}u_{21})(\partial'_3 A'_1 - \partial'_1 A'_3) \\
&\quad + (u_{21}u_{32} - u_{31}u_{22})(\partial'_1 A'_2 - \partial'_2 A'_1) \\
&= u_{11}(\partial'_2 A'_3 - \partial'_3 A'_2) \\
&\quad + u_{12}(\partial'_3 A'_1 - \partial'_1 A'_3) \\
&\quad + u_{13}(\partial'_1 A'_2 - \partial'_2 A'_1)
\end{aligned} \tag{14}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_2 &= (u_{32}u_{13} - u_{12}u_{33})(\partial'_2 A'_3 - \partial'_3 A'_2) \\
&\quad + (u_{33}u_{11} - u_{13}u_{31})(\partial'_3 A'_1 - \partial'_1 A'_3) \\
&\quad + (u_{31}u_{12} - u_{11}u_{32})(\partial'_1 A'_2 - \partial'_2 A'_1) \\
&= u_{21}(\partial'_2 A'_3 - \partial'_3 A'_2) \\
&\quad + u_{22}(\partial'_3 A'_1 - \partial'_1 A'_3) \\
&\quad + u_{23}(\partial'_1 A'_2 - \partial'_2 A'_1)
\end{aligned} \tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})_3 &= (u_{12}u_{23} - u_{22}u_{13})(\partial'_2 A'_3 - \partial'_3 A'_2) \\
&\quad + (u_{13}u_{21} - u_{23}u_{11})(\partial'_3 A'_1 - \partial'_1 A'_3) \\
&\quad + (u_{11}u_{22} - u_{21}u_{12})(\partial'_1 A'_2 - \partial'_2 A'_1) \\
&= u_{31}(\partial'_2 A'_3 - \partial'_3 A'_2) \\
&\quad + u_{32}(\partial'_3 A'_1 - \partial'_1 A'_3) \\
&\quad + u_{33}(\partial'_1 A'_2 - \partial'_2 A'_1)
\end{aligned} \tag{16}
$$

が成り立ちます．

よって無事，式 (7)，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\boldsymbol{A} &= (\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k)\boldsymbol{e}_i \\
&= u_{ih}(\varepsilon_{hlm}\partial'_l A'_m)\boldsymbol{e}'_i
\end{aligned} \tag{7}
$$

が示せました．

それでは，今日はこの辺で．

続きは こちら．