任意の固有値と固有ベクトルを持つ行列の求め方

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2012-07-25

固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ とそれに対応する互いに線形独立な固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots$ を持つ行列 A の作り方を考えます．一見，難しそうですが，結果は簡単です．

それでは，さっそく求めてみます．求めるｎ次正方行列 A に対し，固有値 $\lambda_i \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$ を持つ列ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ とすると，

$$A\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i \tag{1}$$

が成立します．すると，ｎ次の正方行列

$$P = (\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2 \cdots \boldsymbol{v}_n) \tag{2}$$

同じく行列

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

として，まとめて表すことができて，

$$AP = P\Lambda \tag{4}$$

ここで P は，線形独立な列ベクトルからなるので，逆行列が存在して，

$$A = P\Lambda P^{-1} \tag{5}$$

と求まりました．これは少し変形してやると，

$$\Lambda = P^{-1}AP$$

なので，対角化の作業を逆にしたものであることが分かります．なかなか興味深いです．

それでは，今日はこの辺で．