ベクトルの回転

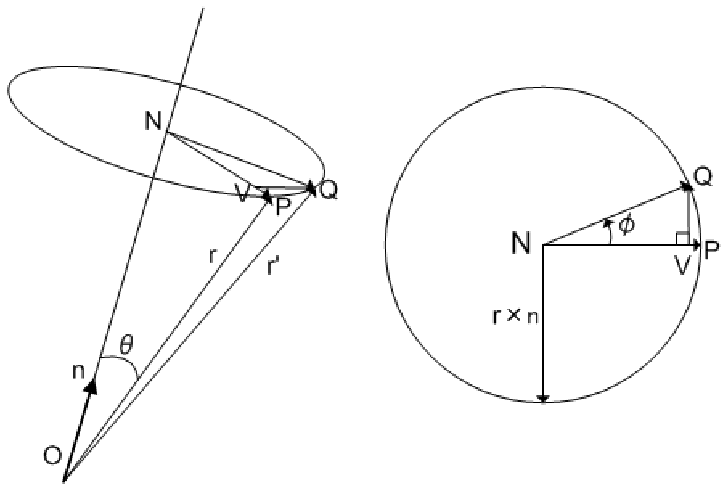
Joh @物理のかぎプロジェクト

2005-03-28

ある軸の回りに，グルリとベクトルを回転させるとどうなるかを考えます．ベクトルの計算としては，内積，外積，ベクトルの射影が出てきます．忘れてしまった人は先に もう一度ベクトル を復習してみて下さい．最初に有限回転 (回転の大きさが無視できない) の場合を考えます．次に，有限回転の式から微小回転 (回転が十分小さい) の場合の式を導きます．この二つの式を導くのが本稿の目的です．

ベクトルの有限回転

ベクトル $\boldsymbol{r}$ を，$\boldsymbol{r}$ と並行ではない単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ の回りに，角度 ϕ だけ回転させたものを $\boldsymbol{r'}$ とします．回転の方向はネジを回すとベクトル $\boldsymbol{n}$ の方向にネジが進むような方向です．つまりは，次の図のような状況を考えているわけです．目標は，$\boldsymbol{r'}$ を $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{n}$, ϕ で表すことです．頑張りましょう．



この図さえ綺麗に書ければ，半ば勝負はあったようなものです．r' は次のように表すことが出来ます．図を見ながら，式を一行ずつ納得して読んで行って下さい．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r'} &= \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NV} + \overrightarrow{VQ} \\ &= \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}) + [\boldsymbol{r} - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})]\cos\phi - (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})\sin\phi \end{aligned} \tag{1}$$

一気に最後まで書いてしまいましたが，ここでの計算は大丈夫でしょうか．途中で，ベクトルの射影と外積を使っています．一応，何がどうなっているのか，説明をしておきましょう．

[式の解説]

一行目はさすがに大丈夫だと思います．

二行目を一項ずつ見ていきましょう．まず $\overrightarrow{ON}$ ですが，これは r を n に射影したものですので $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})$ となるわけです．n は単位ベクトルなので長さは 1 だということに注意して下さい．(ベクトルの射影を忘れてしまった人は，もう一度ベクトル を復習して下さい．)

次にベクトル $\overrightarrow{NV}$ ですが，これはベクトル $\overrightarrow{NP}$ と向きが同じで，長さは $\cos\phi$ 倍のものですので (上図の右側を見てください)，$\overrightarrow{NP}\cos\phi = [\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}]\cos\phi = [\boldsymbol{r} - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})]\cos\phi$ と書けるわけです．

最後にベクトル $\overrightarrow{VQ}$ ですが，これが $(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})\sin\phi$ だというのには，少し説明が要るかもしれません．まず外積の定義を思い出しましょう．外積 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}$ の向きは，ねじ回しを，ベクトル $\boldsymbol{r}$ からベクトル $\boldsymbol{n}$ に向かって回したときに，ネジが進む方向でした．つまり，右の図に書いてあるような向きになります．また，その大きさは $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{n}$ のなす角を θ とすれば $\left|r\right|\left|n\right|\sin\theta = \left|r\right|\sin\theta$ でしたので，ちょうど図に描いてある円の半径と等しくなるわけです．θ は左の図に書き込んでありますので，$\left|r\right|\sin\theta$ が図の円の半径に等しくなることを確認して下さい．VQ の長さは円の半径の $\sin\phi$ 倍ですから，$\overrightarrow{VQ} = -(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})\sin\phi$ となるわけです．($r\times n$ と $\overrightarrow{VQ}$ は向きが逆なのでマイナスがついていることにも注意して下さい．)

[式の解説終わり]

式 (1) は『ベクトル $\boldsymbol{r}$ を，ベクトル単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ の回りに半時計回りに角 ϕ だけ回転させた』ベクトル $\boldsymbol{r'}$ を表す式だということです．これはロドリグの公式と呼ばれています．少しだけ項のまとめ方を変えて，次のような形で紹介されていることの方が多いかも知れません．

$$\boldsymbol{r'} = \boldsymbol{r}\cos\phi + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})[1-\cos\phi] - (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})\sin\phi \tag{2}$$

無限小回転

さきほど求めたロドリグの公式で，回転が微小の場合を考えましょう．式 (2) で，ϕ の代わりに $d\phi$ とします．このとき $\cos d\phi = 1$, $\sin d\phi = d\phi$ とみなせますので，式 (2) は次のような簡単な形に帰着してしまいます．

$$\boldsymbol{r'} = \boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})d\phi$$

回転が微小のときにはベクトル $\boldsymbol{r}$ の変化も微小だと考えて，$\boldsymbol{dr} = \boldsymbol{r'} - \boldsymbol{r}$ と置くと，次のように書けることが分かると思います．

$$\boldsymbol{dr} = \boldsymbol{r'} - \boldsymbol{r} = -(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})d\phi \tag{3}$$

これがベクトルを微小回転させたときの変位を表す式です．教科書によっては，この式がいきなりベクトルの微分というページに出てくることもあります．それはそれで一つの考え方です．本稿では，敢えて，図形的に有限回転の場合をまず求め，そこから無限小回転の場合を導くというアプローチを取りました．

回転する座標系から運動を見るときに，遠心力，コリオリ力などの見かけの力が働きますが，こうした

見かけの力を求めるときに式 (3) がとても大事です．

まとめ

公式としてベクトルの回転の式を再掲しておきます．ときには有限回転の式も重要です．
有限回転の式：

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}\cos\phi + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})[1-\cos\phi] - (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})\sin\phi \tag{2}$$

微小回転の式：

$$\boldsymbol{dr} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} = -(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})d\phi = (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r})d\phi \tag{3}$$

注) 有限回転の式を，ロドリグの公式と呼びましたが，この式を導いたのはロドリグではないという説が有力です．この式自体は，実はもっと昔から知られていたようなのですが，ベクトルという概念がまだ無かったので，違った説明のされかたをされていました．ベクトルという概念を前面に押し出して，この公式を初めて導いたのはギブスのようです．こういった事情により，ロドリグの公式という言い方を避けて，ベクトルの回転公式などと呼ぶ人もいるようですが，未だに定着している名前はありません．本稿では，慣用に従ってロドリグの公式という名前を使いました．