可解群について補足

Joh @物理のかぎプロジェクト

2007-03-03

有限群 G の部分群の組成列を考えるとき，隣り合う群の商群 G_n/G_{n+1} が全て可換群になるとき，G を **可解群** と呼ぶのでした．

$$G = G_0 \supset G_1 \supset ... \supset G_{n-1} \supset G_n = \{e\} \tag{1}$$

可解群の定義だけは 組成列と単純群 で紹介していますが，その役割については何も触れませんでした．名前から察せられるように，方程式の可解性を考えるときに重要な概念なのです．この記事では，後でガロア理論で使うために必要な，可解群に関する定理を導いておきます．二つ定理を紹介しますが，二番目の方が特に重要です．

theorem

群 G の正規部分群を H とします．G が可解群となるのは，H および G/H が可解群になる場合に限ります．

proof

式 (1) の組成列を考えて，$H = G_k$ だと仮定します．すると H の組成列として $H = G_k \supset ... \supset G_n = \{e\}$ を考えることが出来ます．また，商群 G/H の組成列は $G/H = G_0/H \supset G_1/H \supset ... \supset G_n/H = \{e\}$ で与えられます．ここで 第三同型定理 を使うと $(G_{i+1}/H)(G_i/H) \sim G_{i+1}/G_i$ が言えますので，結局 G の組成列の要素である各 G_i は，H や G/H の組成列でも全く共通だということが示されます．これより定理が成り立つの明らかです．■

次の記事，ガロア群と可解群 の定理の証明では，次の定理を活用します．

theorem

有限巡回群は可解群です．

proof

証明は数学的帰納法によります．巡回群が一般に可換群であることより，位数が $1, 2, 3$ までの有限巡回群は，正規部分群として $\{e\}$ しか含まないので，可解群になることは自明です．一般に，位数が $n-1$ までの巡回群が可解群になると仮定しましょう．このとき，位数 n の有限巡回群 Z_n に対し，もし n が素数ならば，Z_n の正規部分群は $\{e\}$ だけとなり，定理は自明です．n が素数ではないとして，n が素数 p で割り切れるとすると，シローの定理 により，Z_n は位数 p $(< n)$ の部分群 H を持ちます．特に Z_n は可換群ですから，H は正規部分群で，このとき仮定より H は可解群となり，G/H も可換群になります．■

まだ，この段階では定理の使い方がピンと来ないと思いますが，ゆっくりゆっくり進んで行きましょう．