

ベクトル・ポテンシャル

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-10-11

ベクトル場 $\mathbf{A}$ を、次のようにベクトル $\mathbf{X}$ の回転によって表現できるとき、 $\mathbf{X}$ を $\mathbf{A}$ の **ベクトル・ポテンシャル** と呼びます。

$$\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{X} \quad (1)$$

ポテンシャル関数という意味では、ベクトル場には **スカラーポテンシャル** というものもあることは覚えていただきたいと思います。スカラーポテンシャルは一つのスカラー関数で、ベクトル関数よりも扱いやすいですから、ベクトル場をスカラーポテンシャルで表現することにはそれなりに便利な点があります。しかし、ベクトルポテンシャルはベクトルポテンシャル自身がベクトル場ですから、それでベクトル場を表現しても、それほど手間は変わりません。

そんなことが理由なのか分かりませんが、ベクトル解析の教科書を何種類か当たってみても、スカラーポテンシャルに比べてベクトルポテンシャルの扱いが不当に小さいような印象を受けます。物理の問題では、スカラーポテンシャルに負けず劣らず、ベクトルポテンシャルが重要な場合がありますから、やはりきちんと理解しておいた方が良いでしょう。

ベクトルポテンシャル

デカルト座標系でベクトル場 $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ を考えます。 $\mathbf{A}$ がベクトルポテンシャルのみを使って $\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{X}$ と表現できるとき、次式で与えられるベクトル場 $\mathbf{X}$ は $\mathbf{A}$ のベクトルポテンシャルになっています。ただし、 A_x, A_y, A_z はそれぞれ C^1 級の関数とします。

$$\mathbf{X} = \mathbf{e}_x \left(\int_{z_0}^z A_y(x, y, \xi) d\xi \right) - \mathbf{e}_y \left(\int_{z_0}^z A_x(x, y, \xi) d\xi - \int_{x_0}^x A_z(\xi, y, z_0) d\xi \right) \quad (1)$$

本当に、この $\mathbf{X}$ が $\mathbf{A}$ のベクトルポテンシャルになっていることは、直接式 (1) に代入して確かめてみてください。なんだか、天下りの的になってしまってすみません。

*1 電磁気学では、磁束密度ベクトルを $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ と表現でき、この $\mathbf{A}$ を電磁ポテンシャルと呼ぶことがあります。これは、ベクトルポテンシャルの例です。ただし、これは古風な表現で、 $\text{divrot}=0$ より、電磁ポテンシャルなどを使わずに $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ と表記するのが現在の主流です。（これは、電磁気学の基礎方程式の一つとして、マックスウェル方程式の一つになっています。）電磁誘導の式も $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$ のように書かれますから、これもベクトルポテンシャルだと見るのが可能です。興味のある人は、電磁気学の教科書を当たって見て下さい。ベクトルポテンシャルに関して、数学的に重要なのは **ヘルムホルツの定理** です。

練習問題

- (1) ベクトル場 $\mathbf{A} = (ax^2y - 8xyz^3, -3x^2y^2, byz^4)$ が, ベクトルポテンシャルを用いて $\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{X}$ と書けるように, 定数 a, b を決定して下さい. (ヒント: $\text{div} \mathbf{A} = 0$ が必要です.)
- (2) ベクトルポテンシャルには, スカラー関数の勾配 $\nabla\phi$ 分だけの差は許されること, つまり, $\mathbf{X}$ がベクトルポテンシャルならば, $\mathbf{x} + \nabla\phi$ もベクトルポテンシャルになることを確認して下さい.
- (3) ベクトル場 $\mathbf{A}$ のベクトルポテンシャルを求めて下さい.