ガウスの発散定理

Joh @物理のかぎプロジェクト

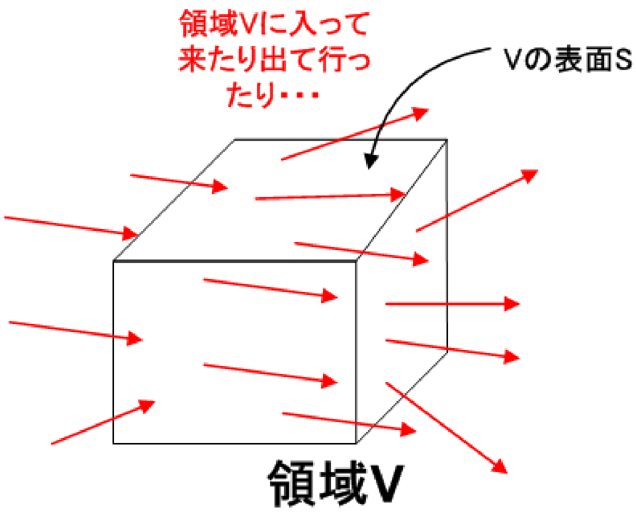
2006-10-11

ベクトルの面積分に関して，**ガウスの発散定理** と呼ばれる重要な定理があります．

theorem

【ガウスの発散定理】 $\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{A}dV = \int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$

式の変数や積分領域に説明が必要でしょう．左辺は体積分になっていて，V というのがその積分領域です．右辺は面積分になっていて，左辺の積分領域を与える図形の，表面積だけを意味するものです．『発散の体積分が，面積分になってしまう』とは，一体どういうことなのでしょうか？この定理の意味は，物理的・直観的に，よく理解できるものなので，定理を忘れないためにも，まずは簡単に，直観的に考えてみたいと思います．



ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ は何かの流れだと考えてください．簡単のため，水の流れだとします．ベクトルの発散

[*1] この定理を，ガウスの定理，ガウスの積分定理などと呼ぶ人もいますが，ガウス (Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)) は，あらゆる数学の分野を研究しており，未だに刊行されていない著作集は 50000 ページを越えるだろうと言われる数学史上最大の超人です．ガウスの定理と言われる定理は無数にあるので，なるべく正確に『ガウスの○○の定理』というように，定理の内容が伝わる名前を使った方が良いと思います．この記事も，そのような理由でガウスの発散定理としました．

は，湧き出しや吸い込みを意味するのでした（ div 参照）ので，定理の左辺の意味は『領域 V 内全体で，新たに増えたり減ったりする流れの総量』を表わすと考えられます．いま，水の圧縮性を考えていませんので，もし，湧き出しや吸い込みが全くなければ，領域 V に流入する水量と流出する水量は同じになるはずです．もし湧き出しがあれば，流出する水量の方が多くなり，吸い込みがあれば流入する水量が多くなるはずです．（温泉の湧き出し口か何かをイメージして下さい．）領域 V 全体での，水量の増減がガウスの発散定理の左辺で意味されているわけです．

一方，右辺の中の $\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$ は『この領域 V の表面 S における，$\boldsymbol{A}$ の法線方向成分』だと考えられますので，定理の右辺は『領域の表面 S 全域に渡る，S を通過する流れの総量』を表わすものと考えられます．つまり，定理の意味を日本語で再び書くと次のようになります．

Important

（領域全体での増減） = (**領域表面で出たり入ったりした量の差**)

もう一度，最初の式とこの文章を比べて，式の意味をきちんと納得できるまで考えてみて下さい．良い例ではないかも知れませんが，卑近な例としては刑務所を例にとることが出来ます．刑務所に収容されている犯罪者数の増減は，『(新たに入所してくる人数） − （出所していく人数)』で表わすことが出来ます．そして，内部の様子はなかなか調べられませんが，調べたいのが増減だけならば，出入り口だけ調べていれば分かるわけです．ガウスの定理の真髄は，領域内部の **体積分を実行するのが大変場合でも，知りたいのが変化率だけならば，表面の出入りだけを調べることで済ませられる** 点にあります．

次に，ベクトル場を $\boldsymbol{V}(x_1,x_2,x_3)=(P(x_1,x_2,x_3),Q(x_1,x_2,x_3),R(x_1,x_2,x_3))$ と置いて，ガウスの発散定理の証明を考えます．積分領域 V を囲む閉曲面 S は，表と裏を区別できる曲面だとし，外向きの法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とします．また，次元が分かりやすいように体積分は $\int\int\int$，面積分は $\int\int$ のように，積分記号を重ねて書くようにします．

$$\begin{aligned}\int\int_V\int\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}+\frac{\partial Q}{\partial x_2}+\frac{\partial R}{\partial x_3}\right)dV &= \int\int_S (P,Q,R)\cdot d\boldsymbol{S}\\ &= \int\int_S (P\cos(\boldsymbol{n},x_1)+Q\cos(\boldsymbol{n},x_2)+R\cos(\boldsymbol{n},x_3))dS\end{aligned}$$

proof

まず，x_1 軸から考えます．x_1 軸に平行な直線は何本でも引けますが，こうした直線のうち，閉曲面 S と三点以上で交わるものは無いとします．（つまり，x_1 軸と平行で S と交わるような直線は，必ず一点（接する）か二点（交接する）で交わるという仮定です.）これら交点のうち，原点に近い側を M_1，もう一方を M_2 とします（図１を参照）．このとき，V の x_2x_3 平面への射影を S_{23} とすると，体積分の x_1 軸方向成分は，$\int\int\int_V \frac{\partial P}{\partial x_1} dV = \int\int_{S_{23}} \left(\int \frac{\partial P}{\partial x_1} dx_1 \right) dS_{23} = \int\int_{S_{23}} [P(M_2) - P(M_1)] dS_{23}$ と表わせます．（ 面積分と体積分 で考えた形です.）ここで，面積素 dS_{23} は，点 M_2 における曲面 S の面積素 $dS(M_2)$ の射影として表現できます．$dS_{23} = dS(M_2)\cos(\boldsymbol{n}(M_2), x_1)$．（点 M_1 における面積素 $dS(M_1)$ の射影も同様ですが，点 M_1 では法線ベクトルの向きが x_1 軸の向きと逆になるため，$dS_{23} = -dS(M_1)\cos(\boldsymbol{n}(M_1), x_1)$ のようにマイナスがつくことに注意して下さい.）これより $\int\int\int_V \frac{\partial P}{\partial x_1} dV = \int\int_S P\cos(\boldsymbol{n}, x_1) dS$ が言えます．全く同様に $\int\int\int_V \frac{\partial Q}{\partial x_2} dV = \int\int_S Q\cos(\boldsymbol{n}, x_2) dS$，$\int\int\int_V \frac{\partial R}{\partial x_3} dV = \int\int_S R\cos(\boldsymbol{n}, x_3) dS$ も言えるので，これらの式の辺々を足して定理が示されます．■

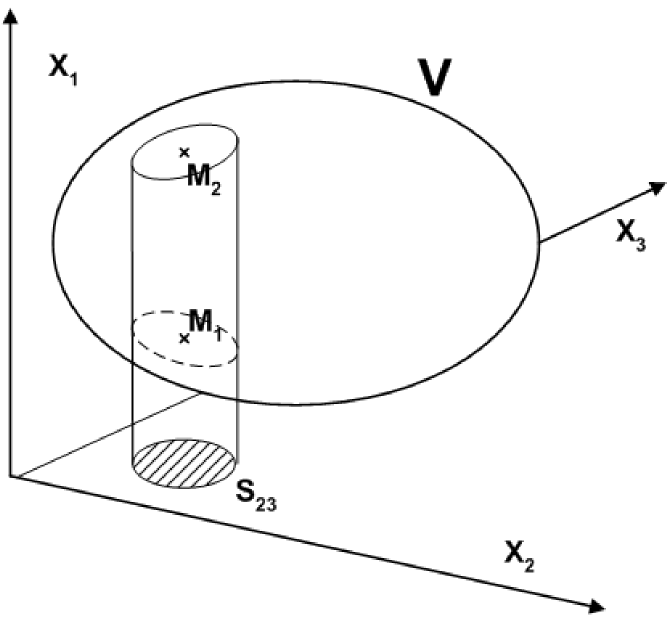


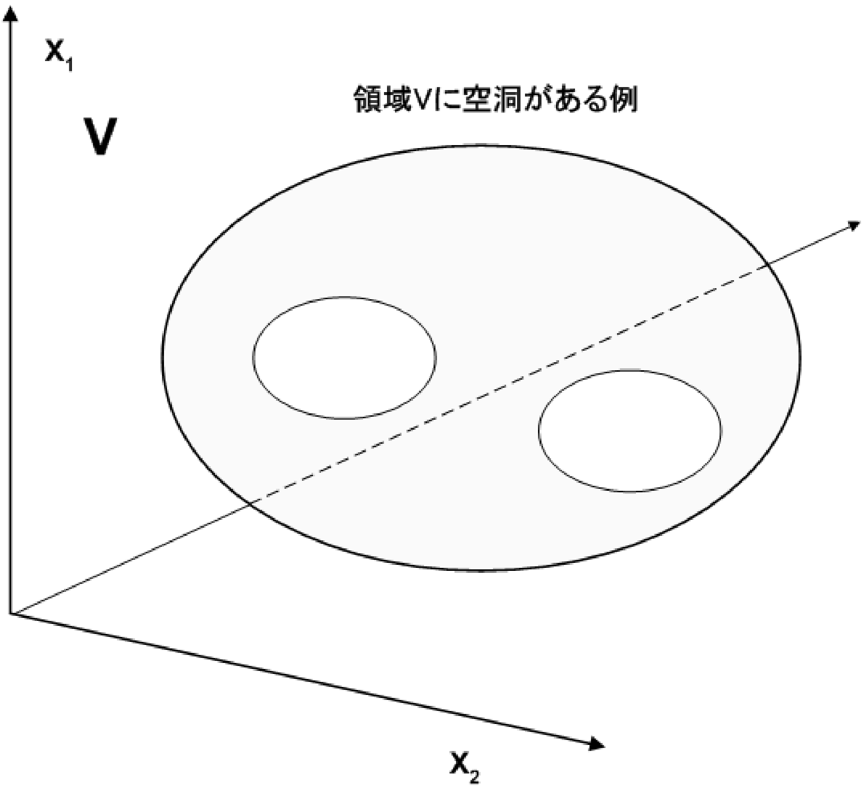
図１　図１

結局，証明では，各成分毎に $\int\int\int_V \frac{\partial P}{\partial x_1} dV = \int\int_S P\cos(\boldsymbol{n}, x_1) dS$ のような形を考え，最後に三つ足すだけになっています．これら個別の関係式は 面積分と体積分 で考えたものです．しかし，各成分毎に成り立っている式を，単に辺々足し合わせているだけならば『なぜ成分毎の公式にしないのか？必要な時に足し合わせればいいんだから，その方が細かく使えていいじゃないか.』と思う人がいるかも知れません．ガウスの発散定理が各成分の式を足した形になっているのは，この形が **座標系によらない** からです．つまり，もし $x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = (u,v,w)$ と表わせるとして，変数を (x,y,z) から (u,v,w) に変換したとしても，ガウスの発散定理はやはり成り立つのです．これは非常に美しい結果ですし，座標成分という勝手に取った標構の向こうに，何か不動の本質的な物が見え隠れしているように思えてきます．

ガウスの発散定理の座標不変性については 微分形式 で詳しく考える予定です．当面はとりあえず，座標不変というキーワードだけを覚えておいて下さい．

[*2] 証明の中で，x_1 軸に平行な直線は曲面 S と二箇所以上では交わらないと仮定しました．これは，位相的に言えば，領域 V の中に描いた輪を縮めていくとき，輪をどこに取っても一点にまで縮められるということです．ただし，この条件は外すことも出来ます．領域 V の中に，空洞（大根の鬆を想像してください）が幾つかあっても，V を幾つかの小領域に分割し，それぞれに対してガウスの発散定理を適用することで，全体としてもガウスの発散定理が成り立つことが示せます．隣同士で接している小領域では，接している面での面積分が相殺するからです．

[*3] ここまでは，暗黙のうちに曲面 S は十分滑らかだとしていましたが，区分的に滑らかとしても定理は成り立ちます．区分的に滑らかと言うのは，幾つか尖がった点があっても良いということです．三角柱や円筒など，普通の形の領域には，たいていガウスの発散定理が安心して使えます．



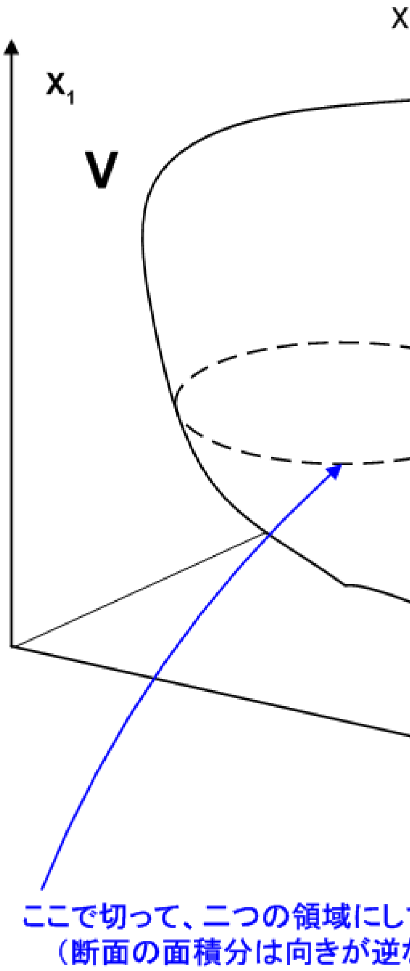


図 2　図 2