無限小回転 1

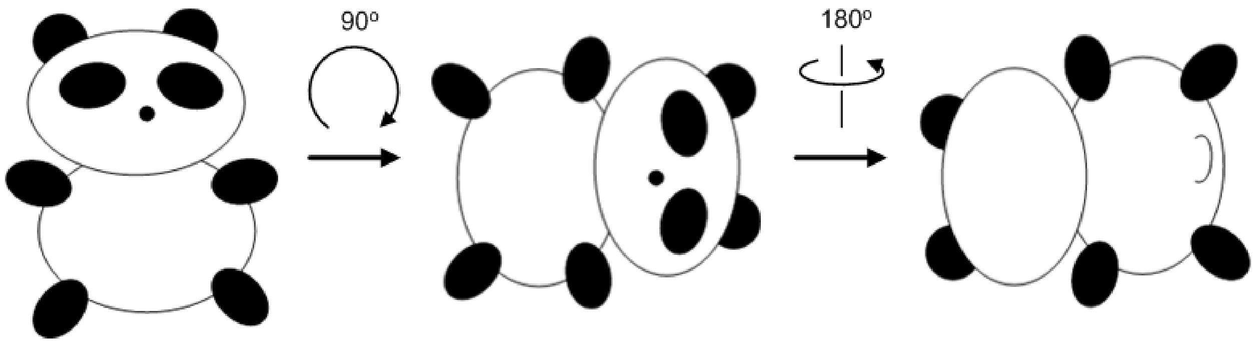
Joh @物理のかぎプロジェクト

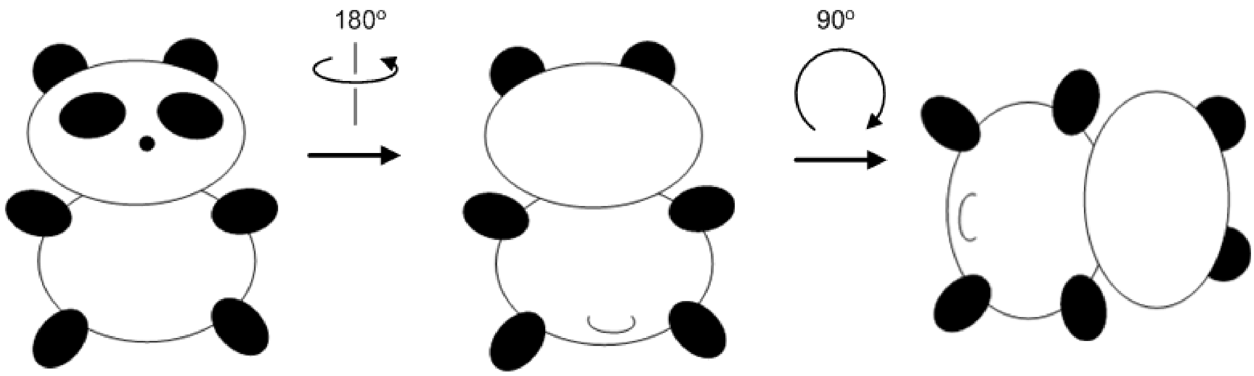
2005-05-23

剛体の回転を勉強するとき，無限小回転という考え方が出てきます．回転角が無限に小さい回転を無限小回転と呼ぶのです．しかし，回転が無限に小さかったら，いつまでたっても全然回りませんね．どうして，こんな回転を考えるのでしょうか．潔く，グルリと回してしまったらいけないのでしょうか？回転について少し考察を深めてみようというのが，この記事の目的です．順序として，まず剛体の有限回転 (回転の大きさが無視できない回転) について考えます．その後，有限回転と比較しながら，無限小回転に特有の特徴を考えます．このページを読み終わったら，そのまま 無限小回転 2 へ進んでください．二つ合わせて一つの内容になっています．

有限回転

まずは次の図を見てください．剛体に，右にグルリと 90 度倒す回転と，180 度ひっくり返す回転を連続して行った様子を描いたものです．同じ回転なのに，順序を変えただけで，結果が違ってしまっています！！





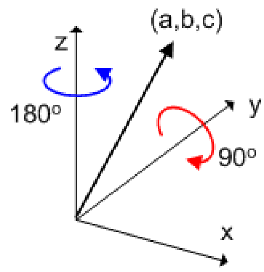
このように，回転という操作は，一般的に順序を入れ替えると結果が違ってしまうのです．順序が変えられないということを，数学では『非可換である』と言います．

剛体の向きをベクトルで表すことにすると，ベクトルに回転行列を掛けることによって，ベクトルの回転，すなわち剛体の回転を表わすことができます．[*1]

では，パンダの図で行った回転を，ベクトル (a,b,c) と行列を使って表現してみましょう．移動したあとのベクトルを (a',b',c') と名づけておきます．回転行列を忘れてしまった人は，この機会に 回転行列を復習してみて下さい．とりあえず，回転行列を忘れてしまっていても，今この記事をざっと読むのには差し支えありません．

まずは，ベクトル (a,b,c) を y 軸回りに 90 度回転させ，それから z 軸回りに 180 度回転させます．

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 180^o & -\sin 180^0 & 0 \\ \sin 180^o & \cos 180^0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 90^o & 0 & \sin 90^0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 90^o & 0 & \cos 90^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -c \\ -b \\ -a \end{pmatrix} \qquad (1)
\end{aligned}
$$



今度は先に z 軸回りに 180 度回転させ，しかる後に y 軸回りに 90 度回転させるという回転を表してみましょう．行列の順序を入れ替えただけです．

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 90^o & 0 & \sin 90^0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 90^o & 0 & \cos 90^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 180^o & -\sin 180^0 & 0 \\ \sin 180^o & \cos 180^0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c \\ -b \\ a \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

予想通り！回転の順番を変えただけで結果が違ってしまいました．数式で書くと，途端に頭が痛くなってくる人がいるかも知れませんが，どうか難しく考えないで下さい．先ほど図で見たパンダ (謎) の回転を式で表してみただけなのです．『回転は順番が大事なんだ』ということだけ頭の隅に覚えておいて下さい．細かい式は気にしなくて大丈夫です．

無限小回転

それでは，回転の角度が非常に小さいの場合を考えてみましょう．回転行列 A によって微小回転を表現します．A の表す回転は大変に小さいので，単位行列 E と微小回転部分 ε (ε の二次以上の積は無視できる) を用いて $A = E + \varepsilon$ と表現できるとします．では，二つの微小回転 A_1 と A_2 を連続して行うことを考えて見ましょう．

$$A_1 A_2 = (E + \varepsilon_1)(E + \varepsilon_2) = E + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \simeq E + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

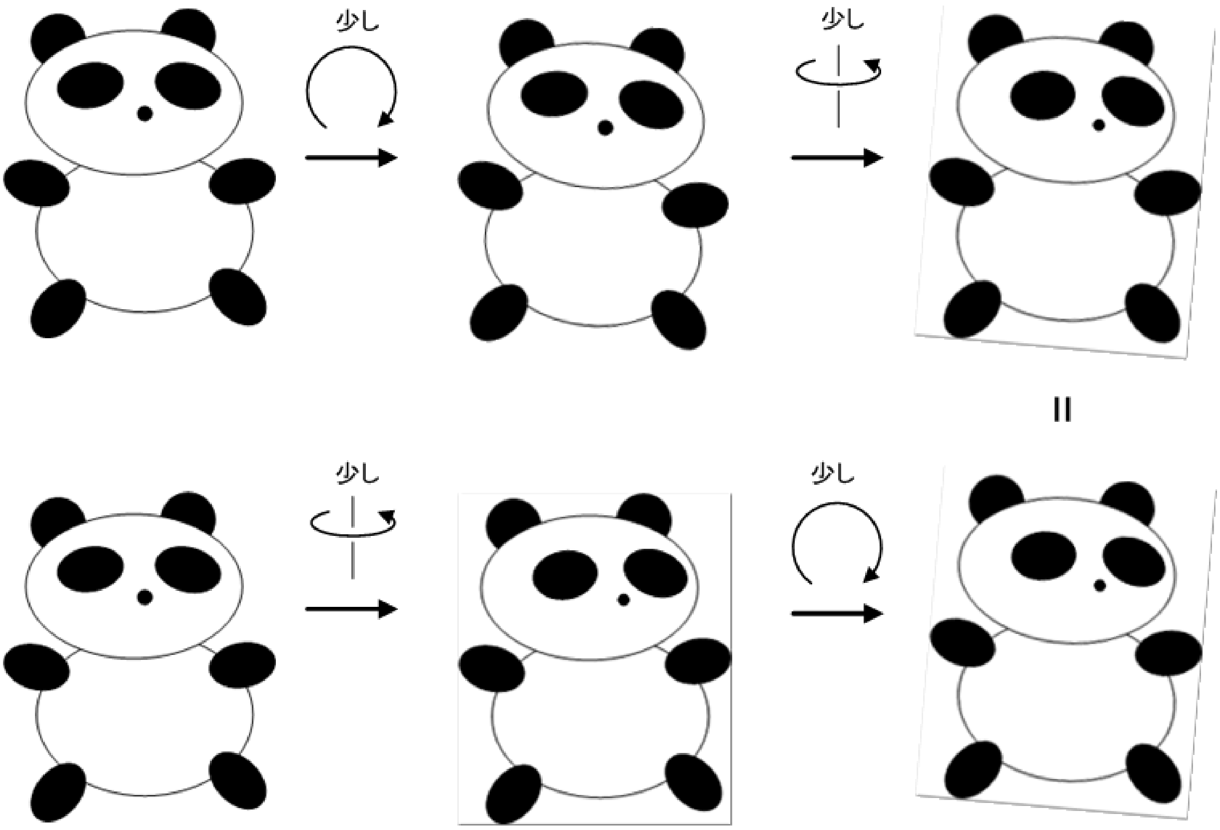
$$A_2 A_1 = (E + \varepsilon_2)(E + \varepsilon_1) = E + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \varepsilon_1 \simeq E + \varepsilon_2 + \varepsilon_1$$

行列の積は非可換でしたが，行列の和は順番を変えても良かったことを思い出してください．(一般に行列 A , B に対し，$A + B = B + A$ が成り立ちます．) すると，結局 $A_1 A_2 = A_2 A_1$ が成り立ちます．『微小回転においては，回転の順番を交換できる』と言えるわけです．[*2] これはもう，回転角が大きいか小さい

[*1] 回転操作の非可換性は，行列の積が非可換である (行列 A , B に対し，一般には $AB \neq BA$ である) ことと対応しているわけです．一般に回転行列は，すべて直交行列です．直交行列とは，転置行列が逆行列になっているような行列のことでした．回転は 四元数 を用いて表現することもできます．四元数の積も，もちろん非可換になっています．

かというだけの問題ではありません．『可換』と『非可換』とは，数学的に，天と地ほどの違いがあるのです．“無限小回転は数学的に全く違う性質を持つのだ” と思ってください．読者のみなさんにおかれましては，どうかこの感動を，しばしゆっくりと味わって頂きたいと思います．

もう一度，パンダを回してみましょう．先ほどと同じ向きに回しますが，今回，回す角度をほんの少しだけにしておきます．回転の順番を変えても，結果がほとんど同じだということが見て分かります．



*2 行列を微小量 ε で表しましたが，行列が微小とはどういうことなのか，この表記について気になった方がいらっしゃるかと思います．ベクトルに行列を掛けると，一般にはその長さと角度が変化を受けますが，ここでは行列 $A = E + \varepsilon$ による変化が，長さについても角度についても，二次以上の項が無視できるほど微小なのだ，ということです．$\boldsymbol{r}' = (E+\varepsilon)\boldsymbol{r}$ と置きますと，$\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} = (E+\varepsilon)\boldsymbol{r} - E\boldsymbol{r} = \varepsilon\boldsymbol{r}$ と表されますので，$\delta\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r} = \varepsilon^2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})$ が成り立ちます．$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}$ は微小量ではありませんから，結局，『ベクトルの変化 $\delta\boldsymbol{r}$ の高次の微小量が無視できる』ということを，形式的に『行列 ε の高次の微小量が無視できる』と言い換えられるわけです．

練習問題

次の行列 A , B に対し，θ , ϕ が二次以上の項を無視できるような微小量ならば，$AB = BA$ が成り立つことを確認してみて下さい．

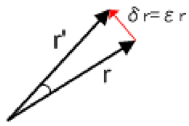
(ヒント) 微小量 θ に対して $\sin\theta \simeq \theta$, $\cos\theta \simeq 1$ を使いましょう．

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}$$

無限小回転を表す行列

一般に，回転という操作の順番を変えるわけにはいきませんが，無限小回転の場合に限って順番を変えても良い，ということでした．もう少し，このことの考察を進めてみましょう．



微小な回転によってベクトル $\boldsymbol{r}$ が $\boldsymbol{r}'$ に移されたとしましょう．このとき，上の図を見れば，$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{r}$ と書けることが分かると思います．

ベクトル $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{r}'$ に移す変換を，行列 A を用いて $\boldsymbol{r}' = A\boldsymbol{r}$ と表わすことにします．ベクトルの微小変化 $\delta\boldsymbol{r}$ を，行列 ε を用いて $\delta\boldsymbol{r} = \varepsilon\boldsymbol{r}$ と表すことにすれば，$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{r} = (E + \varepsilon)\boldsymbol{r}$ ですから，A は次のように書けるでしょう．

$$A = E + \varepsilon$$

この段階では，行列 ε がどのような形をしているかまだよく分からないので，とりあえず成分を次のように書いておきます．未知の成分が現段階で 9 つあることを確認しておいて下さい．

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

いまから行列 ε の形と成分を，もう少し詳しく考えてみます．道具として使うのは A の逆行列と，A が回転を表す行列なので直交行列であるという性質の二つです．

まず $A = (E + \varepsilon)$ の逆行列ですが，これは $A^{-1} = (E - \varepsilon)$ です．ちょっと天下り的ですが，確かに次のように A と A^{-1} を掛け合わせてみれば単位行列 E になることから確認できます．ε の自乗が無視で

きることに注意して下さい．

$$AA^{-1} = (E+\varepsilon)(E-\varepsilon) = E+\varepsilon-\varepsilon-\varepsilon\varepsilon = E$$

一方，A は回転を表す行列ですから，直交行列です．直交行列というのは，転置行列が逆行列になっているような行列のことを言うのでした．つまり $A^t = A^{-1}$ が成り立つはずです．(A の転置行列を A^t で表します．一般に行列の和と転置行列に関して $(A+B)^t = A^t + B^t$ が成り立つことを使います．ここでは，証明はしませんので，よく分からない人は線形代数を復習してみてください．) $A = (E+\varepsilon)$ の転置行列を考えてみましょう．

$$A^t = (E+\varepsilon)^t = E^t + \varepsilon^t = E + \varepsilon^t$$

よって，$A^t = A^{-1}$ より，$E-\varepsilon = E+\varepsilon^t$ が言えます．両辺から E を引けば次の関係式が得られます．

$$\varepsilon = -\varepsilon^t$$

これを行列 ε の成分で直接考えれば，次のような関係がなりたっているということです．

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon_{11} & -\varepsilon_{21} & -\varepsilon_{31} \\ -\varepsilon_{12} & -\varepsilon_{22} & -\varepsilon_{32} \\ -\varepsilon_{13} & -\varepsilon_{23} & -\varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

両辺の成分を一つ一つを見比べて，ε の形を次のように決めることが出来ます．簡単のため，$\varepsilon_{12} = -r, \varepsilon_{13} = q, \varepsilon_{23} = -p$ のように置きました．

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ -\varepsilon_{12} & 0 & \varepsilon_{23} \\ -\varepsilon_{13} & -\varepsilon_{23} & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$$

このような形の行列を反対称行列と呼びます．(p, q, r の並べ方と，マイナスのつけ方ですが，実はちょっと訳あって，このようにしました．無限小回転 2 でじきにこの理由が分かります．楽しみに待っていてください．フフフ)

　これは非常に感動的な結果です．一般に，3 次元のベクトルに行列を作用させて有限回転を表現するには 3×3 の行列が必要で，9 つの成分を決める必要があったわけです．ところが，微小回転ではたった 3 成分で済むというのですから，計算の労力が一気に三分の一に減ってしまったのです！！

　(無限小回転 2 へつづく)