ガウスの発散定理の応用

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-10-11

この記事では，ガウスの発散定理 から導ける応用的な定理を考えます．ガウスの発散定理がよく分かってない人は，先によく復習しておいて下さい．

【ガウスの発散定理】

$$\iiint_V \mathrm{div}\boldsymbol{A}dV = \iiint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{1}$$

派生する定理１

まず，特殊な場合として，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ があるスカラー関数 ϕ と適当な定ベクトル $\boldsymbol{c}$ を使って $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{c}\phi$ と表わせる場合を考えます．このとき，式 (1) に $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{c}\phi$ を代入すると次式を得ます．$\mathrm{div}(\boldsymbol{c}\phi)=\boldsymbol{c}\cdot(\nabla\phi)$ となることに注意して下さい．

$$\boldsymbol{c}\cdot\left(\iiint_V \nabla\phi dV - \iint_S \phi d\boldsymbol{S}\right)=0 \tag{2}$$

ここで $\boldsymbol{c}$ は任意のベクトルでしたので，括弧の部分 $=0$ が要請されて次式を得ます．これは 面積分と体積分 で考えた公式に他なりません．（面積分と体積分の記事中では，微分の方向を x_1 と仮定していましたが，式 (3) はそれが $\boldsymbol{n}$ 方向に一般化されています.）

$$\iiint_V \nabla\phi dV = \iint_S \boldsymbol{n}\phi dS \tag{3}$$

右辺で $\boldsymbol{n}\phi$ と，少し変な書き方をしましたが，これは狙いがあってのことなので後で説明します．

派生する定理２

次に $\boldsymbol{A}$ があるベクトル関数 $\boldsymbol{A'}$ と適当なベクトル $\boldsymbol{c}$ を使って $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A'}\times\boldsymbol{c}$ と表わせる場合を考えます．このとき，式 (1) は次式のように変形できます．$\mathrm{div}(\boldsymbol{A'}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A'})$ となることと，

$(\boldsymbol{A'} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{A'})$ に注意して下さい．（よく分からない人は ベクトルの公式２ を参考にして下さい．）

$$\boldsymbol{c} \cdot \left(\iiint_V \nabla \times \boldsymbol{A'} dV - \iint_S \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{A'} dS \right) = 0 \tag{4}$$

ここでも $\boldsymbol{c}$ は任意のベクトルでしたので，括弧の部分 $= 0$ が要請されて次式を得ます．

$$\iiint_V \nabla \times \boldsymbol{A'} dV = \iint_S \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{A'} dS \tag{5}$$

派生する定理３

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が，ある適当なベクトル $\boldsymbol{c}$ とテンソル T を使って次のように表現できる場合を考えます．

$$A_i = T_{ij} c_j \tag{6}$$

これを式 (1) に代入し，前の二つの定理と同様の議論を用いると，$\boldsymbol{c}$ が任意のベクトルであることから次式を得ます．

$$\iiint_V \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV = \iint_S T_{ij} n_j dS \tag{7}$$

ここまで読んで，式 (3)(5)(7) が全て似たような形をしていることに気がつくと思います．∇ の作用の仕方が，grad か rot か，はたまた二階のテンソルの微分なのかという違いはありますが，全て次のような形をしています．（作用の仕方が分からないので，∇ の右側は $(\cdots)$ としておきます．作用の仕方は，ここに入る関数次第だということにしておきます．）

$$\iiint_V \nabla (\cdots) dV = \iint_S \boldsymbol{n} (\cdots) dS \tag{8}$$

[*1] 式 (3)(5)(7) が同じ形にまとめられるのは，もちろん偶然ではありません．これらが同じ公式であることは，微分形式の理論 を勉強するとより包括的に理解できると思います．また，この記事の兄弟版とも言える ストークスの定理の応用 も併せてご覧下さい．