

波の式 1

tomo @物理のかぎプロジェクト

2005-07-10

波動を学んでいると、「波の式」というものが登場します。振動の様子を、式で表してみようというものです。任意の点 x の時刻 t における変位 $y(x, t)$ を求めることが目標です。以下では、変位 $y[\text{m}]$ や位置 $x[\text{m}]$ 、時刻 $t[\text{s}]$ 、周期 $T[\text{s}]$ 、波長 $\lambda[\text{m}]$ 、振幅 $A[\text{m}]$ など、波動を学ぶ上で基本的な要素が出てきます。これらについて勉強が済んでいない人は、まず [波の大事な性質](#) から読んでみてください。

原点は単振動している

分かりやすいように、波源は原点にあるとします。そして、その波源は [単振動](#) しています。原点での変位 $y(0, t)$ はどのように表せるでしょうか。

ここでは周期を T としていますので、 $T[\text{s}]$ 経過した時に元の変位に戻っていなければなりません。時刻 $t = 0$ での変位を 0 とし、そこから単振動をスタートしたとすると、

$$y(0, t) = A \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad (1)$$

となります。 A は振幅です。時刻 $t = 0$ からスタートして、 $T[\text{s}]$ 秒後の $t = T$ のときに初めて、位相が 2π に戻りますね。つまり、変位が元に戻ってくるということです。ここで、位相が無次元になっていることも確認してください。(式 (1) のより詳細な説明については、[単振動](#) を参照してください。)

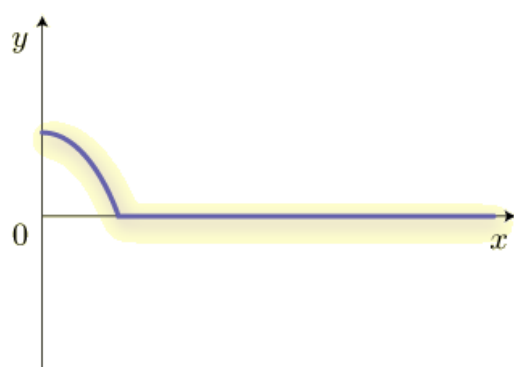
原点の振動が伝わっていく

原点の振動が式 (1) のように表されるとき、波はどのように伝わっていくのでしょうか。グラフに描いてみましょう。ひもの先を原点で振動させるようなイメージです。波源から出た波は、等速で伝わっていきます。

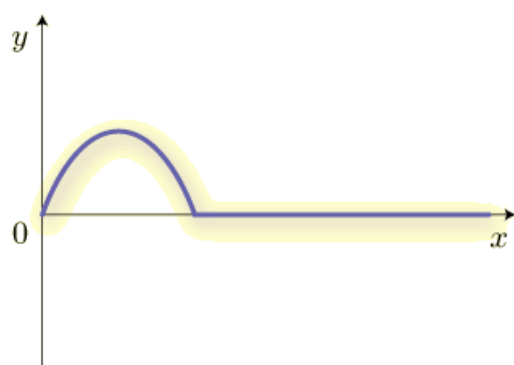
- $t = 0$



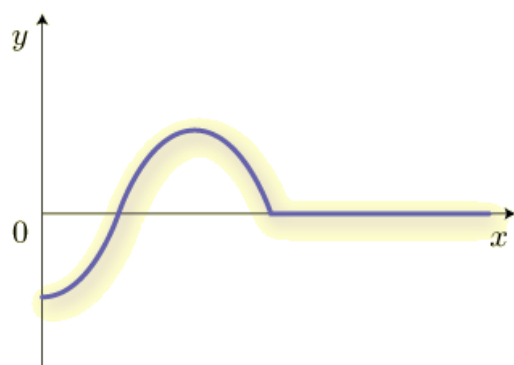
- $t = \frac{1}{4}T$



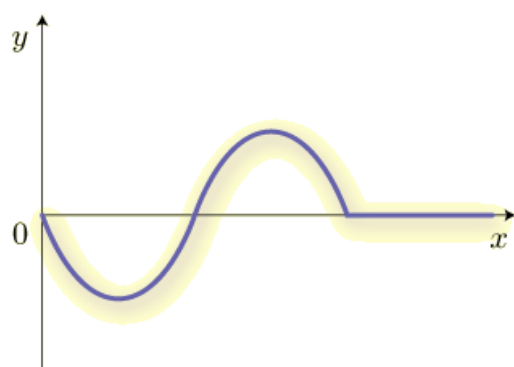
- $t = \frac{1}{2}T$



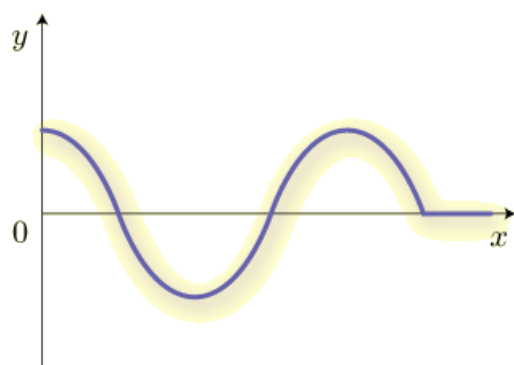
- $t = \frac{3}{4}T$



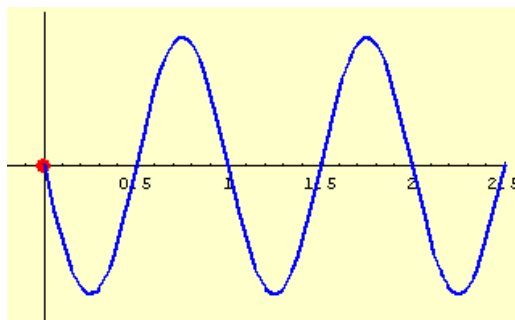
• $t = T$



• $t = \frac{5}{4}T$

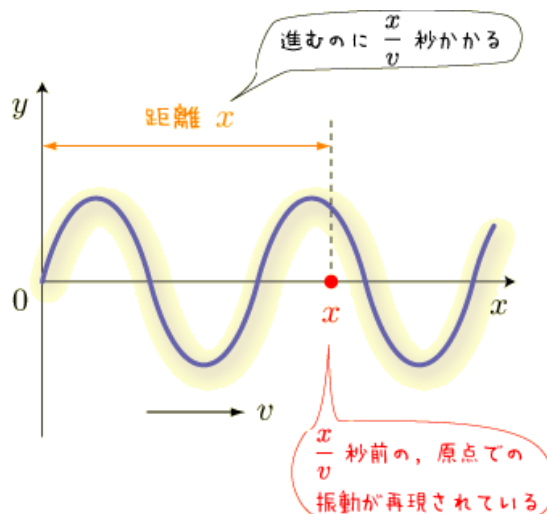


このように伝わっていきますね．原点での振動がだんだんと伝わっていくことが分かります．上に示したグラフは， $y-x$ グラフです．つまり，グラフ 1 枚 1 枚は時刻 t を固定したものということです．そして，時刻を追って動かすと，以下ようになります．



原点以外の点ではどのような振動になるか

では，原点以外の点ではどのような振動になるかをみていきましょう．波は以下のように伝わっていくのでした．



点 x にスポットを当てて考えてみます．今，点 x にいる波も，元はといえば原点にいました．何秒か前の原点の振動が再現されているということもできますね．では，何秒前の原点の振動が再現されているのでしょうか．波の伝わる速さを v としますと，原点から点 x に到達するまでに $\frac{x}{v}$ という時間がかかっています（ $x > 0$ としています）．つまり， $\frac{x}{v}$ 秒前の原点での振動が，今，点 x で再現されているのです．原点は (1) で表される振動をしているわけですから，点 x における変位を $y(t, x)$ とすると，

$$y(t, x) = y\left(0, t - \frac{x}{v}\right) = A \sin 2\pi \frac{\left(t - \frac{x}{v}\right)}{T}$$

となることが分かります．少し書き換えてみますと，

$$\begin{aligned} y(t, x) &= A \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v}\right) \\ &= A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT}\right) \\ &= A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

となります (λ は波長). 今まで一生懸命この式を覚えていた!! っていう人, いませんか? ええ ~ っと . . .
 T はどこだっけ . . . λ はどこだっけ . . . 分子? 分母? なんて思い出そうとしていた人, いませんか?
導出はそれほど難しくありませんから, 式を覚えるより考え方を身に付けてしまった方が良いでしょう. ま
た, はじめのセクションでも触れましたが, 位相は無次元です. (2) 式の括弧の中を見ると, $t[s]$ が
 $T[s]$ で割ってありますし, $x[m]$ が $\lambda[m]$ で割ってありますから, ちゃんと無次元になっています. そう
いったところを気をつけていると, つまらない間違いをふせげるかもしれません.