

ポアソン括弧の変形法

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2013-03-02

解析力学で言うポアソン括弧とは，

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \quad (1)$$

のことを言います．ただし，添え字の i や j が二回現れた時には， $i = 1, 2, \dots, N$ までの和を取ることにします．S 記号を省略するのです．

この記事で示したいものは，

$$\{f, q^i\} = \frac{\partial f}{\partial q^j} \{q^j, q^i\} + \frac{\partial f}{\partial p_j} \{p_j, q^i\} \quad (2)$$

$$\{f, p_i\} = \frac{\partial f}{\partial q^j} \{q^j, p_i\} + \frac{\partial f}{\partial p_j} \{p_j, p_i\} \quad (3)$$

の二式です．

ポアソン括弧は次の基本的な関係を満たします．

$$\{q^i, q^j\} = 0 \quad (4)$$

$$\{p_i, p_j\} = 0 \quad (5)$$

$$\{q^i, p_j\} = \delta_j^i \quad (6)$$

但し， δ_j^i はクロネッカーのデルタです．つまり，

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (7)$$

です．

さあ，式 (2) を示しましょう．

$$\begin{aligned}
 \{f, q^i\} &= \frac{\partial f}{\partial q^j} \frac{\partial q^i}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial q^i}{\partial q^j} \\
 &= \left(\frac{\partial f}{\partial q^j} \frac{\partial q^j}{\partial q^j} + \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q^j} \right) \frac{\partial q^i}{\partial p_j} - \left(\frac{\partial f}{\partial q^j} \frac{\partial q^j}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial p_j} \right) \frac{\partial q^i}{\partial q^j} \\
 &= \frac{\partial f}{\partial q^j} \left(\frac{\partial q^j}{\partial q^j} \frac{\partial q^i}{\partial p_j} - \frac{\partial q^j}{\partial p_j} \frac{\partial q^i}{\partial q^j} \right) + \frac{\partial f}{\partial p_j} \left(\frac{\partial p_j}{\partial q^j} \frac{\partial q^i}{\partial p_j} - \frac{\partial p_j}{\partial p_j} \frac{\partial q^i}{\partial q^j} \right) \\
 &= \frac{\partial f}{\partial q^j} \{q^j, q^i\} + \frac{\partial f}{\partial p_j} \{p_j, q^i\} \\
 &= \frac{\partial f}{\partial p_j} (-\delta_j^i) \\
 &= -\frac{\partial f}{\partial p_i}
 \end{aligned} \tag{8}$$

となります．式 (3) も同様に

$$\begin{aligned}
 \{f, p_i\} &= \frac{\partial f}{\partial q^j} \{q^j, p_i\} + \frac{\partial f}{\partial p_j} \{p_j, p_i\} \\
 &= \frac{\partial f}{\partial q^i}
 \end{aligned} \tag{9}$$

となります．それでは今日はこの辺で．