# 二項演算と「閉じている」

やっさん@物理のかぎプロジェクト

執筆中

代数の理論を追う上で **閉じている** と言う概念が出てきます．群，環，体の理論を追う上で必ず必要となる概念です．その **閉じている** と言う考え方を理解することがこの記事の目標です

## 1. 二項演算

「 **二項演算** 」[*1] とは同じ集合同士にする演算の事をいいます． 1つずつ例を通して確認していきましょう．

### 例1　四則演算

同じ集合に属する数同士の四則演算は **二項演算になります．** 加法は2つの数の和を計算し，減法は2つの数の差を，乗法，除法はそれぞれ2つの数の，積，商を計算します．集合 $\boldsymbol{C}$ (やその部分集合) で考えているときは特に断らず加法，減法，乗法，除法をそれぞれ

$$
\begin{aligned}
a+b&=c\\
d-e&=f\\
g\times h&=i\\
j\div k&=l
\end{aligned}
$$

と言う記号を使って表します．今は「数とは何ぞや」と言う根源的な問題は考えていないので演算のひとつということに納得してもらえれば十分です．

### 例2　ベクトルのスカラー倍，ベクトルと行列の積

ベクトルのスカラー倍は **二項演算ではありません．** ベクトルが $n$ 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{C}^n$ (やその部分集合) の元だとするとスカラーの集合とは異なるので同じ集合同士の演算では無いからです．

ベクトルと行列の積も演算する元の属する集合が違うので **二項演算ではありません**

[*1] 演算とほぼ同義の言葉として「算法」と言う言葉も使われます．四則演算の「加法」「減法」「乗法」「除法」はこの名残かもしれません．また，この「演算」と言う言葉は物理のそれとは意味が異なるのでちょっと注意です．ベクトル解析で出てくる $\boldsymbol{\nabla}$ や，量子力学ででてくる一般の演算子 $\hat{\Omega}$ 等はより純粋な数学では「作用素」といいます．でも英語では同じ “operator” だったりします．

### 例３多項式同士の積

多項式同士の積は **二項演算です．**“多項式同士” と宣言しているとおり同じ集合同士で演算を行うからです．同じ理由で多項式同士の和も **二項演算です．**

### 例４ベクトルの内積，外積

ベクトルの内積は **二項演算です**内積は同じ次元のベクトル同士にしか定義できません[*2] から，同じ集合同士の演算となり，二項演算となります．

次元は三次元に限られますが，ベクトルの外積も **二項演算** です．

### 例５複雑なもの (関数の内積)

ある，複素数値関数の集合の元を $\psi(x), \phi(x)$ とするとき，その関数同士の内積を

$$< \psi, \phi > \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \psi^* \phi$$

と定義する[*3] のですが，これも同じ集合同士の演算なので二項演算の一種と言えます．

## 2．二項演算に関する注意 (演算が行われている集合について)

演算は「 **どの集合の元に演算するか** 」だけではなく，「 **演算の結果，出て来るものがどんな集合の元になっているか** 」にも気を使わないといけません．どういうことかというと，もし演算される集合が同じでも演算の結果の集合が違えばそれは **違う演算** と考えるからです．例えば，乗法に関しても (実数) × (実数) → (実数) と (複素数) × (複素数) → (複素数) とは区別して扱わなければいけません．極端な例としては

1. 多項式同士の積
2. 多項式同士の積の **次数**

と言う二つの二項演算においては実際に手で追う計算は一緒であっても全く違うことをしていると言うことが納得していただけると思います．(前者の演算の結果の集合は “関数” ですが，後者は “自然数 ( $\boldsymbol{N}$ )” です．)

そこで，どの集合で二項演算を行っているかを明示する記法があります．演算する元の属する集合を $S$ とし，その二項演算の結果得られる元の属する集合を $T$ とすると

$$S \times S \to T$$

---

[*2] もちろん集合を人工的にいじれば二項演算ではなくすことも出来ます．例えば片方の数ベクトルを「奇数番目の成分が 0 となるベクトルの集合」とし，もう一方を「偶数番目の成分が 0 となるベクトルの集合」とすれば内積は計算できても二項演算とはいえなくなります．

[*3] この積分値が収束しなければ当然定義できないのでこの関数にある制約を加えなければいけません．ですが議論の方向がそれてしまうので，その “ある制約” は課されているものとしてください．

と書きます．ここで $\times$ と言う記号に乗法という意味は無く，どの集合同士を結び付けているかと言う意味しか持ちません．だから加法でもこの記号でオッケーです．

この記法を使うと実数と複素数の乗法はそれぞれ

$$\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$$
$$\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$$

と表せます．

よく用いる集合は実数 $\boldsymbol{R}$ ，複素数 $\boldsymbol{C}$ 有理数 $\boldsymbol{Q}$ ，無理数 $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Q}$ ，整数 $\boldsymbol{Z}$ ，自然数 $\boldsymbol{N}$ があり，特に断りなくこれらの文字が出てきたらそれぞれの集合のことを表しています．また,「集合ですよ」と言うことを強く主張するために $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}/\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ 等を用いることもあります．

## ３．「演算が閉じている」

**演算が閉じている** とは,

1. 同じ集合同士を演算させること
2. 演算の結果が再びもｔの集合と一致していること

と言う二項演算の事を指します．すぐ上の二項演算の記法を用いれば

$$S \times S \to S$$

とすっきり表すことができます．

例で確認してみましょう．

### 例１　数の加法

#### 複素数同士の加法

複素数同士の加法は **閉じています．** 確かに複素数同士を足してもその結果が複素数になることは直感的にわかると思います．(この場合，たまたま実数になったとしてもそれは複素数の中に含まれると考えます)

#### 複素数以外の集合同士の加法

集合を複素数に限らず，実数，有理数，無理数，整数，自然数同士として考えてみても全ての集合について **閉じています．** 実数同士を足して複素数になることはありませんし，有理数同士を足して無理数を作ることも出来ませんから，閉じていることが確認できます．(他の集合が閉じていることも確認してみてください)

#### 少し複雑な集合同士の加法

この集合をさらに条件をつけて，集合 $S$ を「３で割ると１余る整数」という集合とすると，この集合同士の加法は **閉じていません．** なぜなら適当な整数 $n, m$ を用いて３で割ると１余る数はそれぞれ

$3n+1, 3m+1$ とかけますから，その和は

$$\begin{aligned}(3n+1)+(3m+1) &= 3n+1+3m+1\\ &= 3(n+m)+2\end{aligned}$$

となり，「3 で割って 2 あまる整数」となったのでもとの集合からはみ出してしまっているからです.

## 例２　数の減法

### 複素数，実数，有理数，無理数，整数同士の減法

複素数，実数，有理数，無理数，整数同士の減法は **閉じています．** 加法と同様演算の結果，自分自身の集合からはみ出してしまうことはありません.

### 自然数同士の減法

自然数同士の減法は **閉じていません．** 例えば， $2-3$ と言う演算を行うと結果は $-1$ となり，これは自然数の集合からはみ出しています.

## 例３　数の乗法

### 複素数，実数，有理数，無理数，整数，自然数同士の乗法

複素数，実数，有理数，無理数，整数，自然数同士の乗法は **閉じています．**

## 例４　数の除法

### 複素数，実数，有理数，無理数同士の除法

複素数，実数，有理数，無理数同士の除法は集合から **0 を除いた集合で** **閉じています．** 集合に 0 を含めると除法そのものが定義できなくなってしまうので通常は集合から 0 を除いて考えます.

## 例５　ベクトルの内積

ベクトルの内積は **閉じていません．** 演算の結果がスカラーになってしまうからです.

## 例７　多項式同士の和

多項式同士の和は **閉じています．** 多項式同士の和もやっぱり多項式になります.

## 例題

以下の二項演算が閉じているかを頭の中で考えてみてください．閉じていなければ反例を探してみてください.

### 例題１

偶数同士の加法と，奇数同士の加法

**例題２**

偶数同士の減法と，奇数同士の減法

**例題３**

「３で割ったあまりが１となる数」数同士の乗法

**例題４整数，自然数の除法**

整数，自然数の除法

**例題５ベクトルの外積**

ベクトルの外積

## ４．閉じていたらどうなのか

二項演算が閉じていると，議論の対象を限ることが出来ます．

ひとつは演算の結果が演算する元と同じ集合になっているので複数回の演算が可能になることが挙げられます．例えば，実数は三項の演算が出来ますがベクトルの内積はそういうわけには行きません．

また，一旦集合を限ると議論を一般化しなくてよいこともあります．例えば議論を始める際に，集合を実数に限っておけば閉じた演算を繰り返す限りは複素数の存在を考えなくてもよくなります．線形代数をやるときによく，「複素数または実数」の集合を $\boldsymbol{K}$ とします．なぜなら個々の成分などの演算はいずれも閉じているので最初に実数とすれば最後まで実数に限った議論が複素数とした時と同様に行えるからです．同じ議論が出来れば二回やる必要が無いので使っていると言うのが理由のひとつです．ですから，この場合はひとつの議論をしているときに実数と複素数をほいほい変えていいというわけではありません．

代数の分野で閉じていることを前提に議論をするのはは特に一つ目に挙げた理由が大きいようです．演算の結果が閉じていれば複数回の演算が可能になりより多様な議論につなげられるんですね．