ベクトルのモーメント（トルクと角運動量）

クロメル@物理のかぎプロジェクト

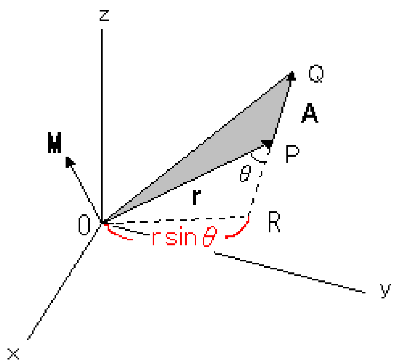
2007-03-17

剛体の回転シリーズ第１弾です．次の記事は，角運動量 です．

ベクトルのモーメント

ベクトルは大きさと方向を持つ量ですが，もともと数学ではあまりその始点（どこからベクトルを引くか）を区別することはありません．しかし物理では，同じベクトルでもその始点によって違う意味を持ったものになることがあります．例えば，物体に同じベクトルで表される力を加える場合でも，どこを押すかによって物体の動きが変わってくることは，容易にイメージできるのではないでしょうか．

ここで，ベクトルのモーメント[*1] について説明します．下の図のように，原点を，点 O とし，位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ で表される点 P に，ベクトル $\boldsymbol{A}$ があるとします．



このとき，O の周りのモーメントとは，

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{A}$$

で表されるベクトル $\boldsymbol{M}$ のことです．

外積を知らない人のために少し説明しますと，このベクトルは，$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{A}$ を含む平面に垂直で，大きさが

[*1] モーメントというと，さまざまな亜種があります．力学では，モーメント（力のモーメント，トルクとも），角運動量（運動量のモーメント），慣性モーメント等があります．電磁気学では，双極子モーメント，磁気モーメント等．材料力学なんかでは，断面一次モーメント，断面二次モーメントなんていうのもあります．どれにも共通して言えるのは，ある強度と始点を問題とする位置の積で表され，採る座標系に依存している量のことのようです．

$|\boldsymbol{r}|\ |\boldsymbol{A}|\sin\theta$ のベクトルです．

成分としては，$\boldsymbol{r}$ の成分を $(x,\ y,\ z)$，$\boldsymbol{A}$ の成分を $(A_x,\ A_y,\ A_z)$ とした時，

$$M_x = yA_z - zA_y, \quad M_y = zA_x - xA_z, \quad M_z = xA_y - yA_x$$

完全反対称テンソル（レヴィ・チヴィタの記号とも）を用いると，簡潔に，

$$M_i = \varepsilon_{ijk} x_j A_k \qquad (i = 1, 2, 3)$$

と書けます．ここで同じ添字を並べて書いたときには，すべての和をとるというアインシュタインの縮約規則[*2] を用いています．

トルクと角運動量

特に力学では，このベクトルのモーメントの中でも重要なものとして，トルク $\boldsymbol{N}$ と，角運動量 $\boldsymbol{L}$ があります．物体にかかる力 $\boldsymbol{F}$ としてトルクは，

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

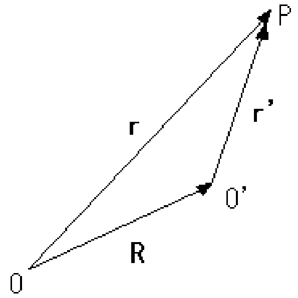
となり，角運動量は運動量 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ として，

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

で表されます．

平行軸の定理

モーメントは，どの点のまわりのモーメントを考えるかによって，変わってくるものです．そこで最後に変換公式を書いて，終わりにします．O から見た点 P をベクトル $\boldsymbol{r}$，O' から見た点 P をベクトル $\boldsymbol{r}'$ で表し，O から見た O' は，ベクトル $\boldsymbol{R}$ とします．



[*2] 例えば A_iB_i と書いたら，$A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$ を表します．

このとき，O から見たモーメント $\boldsymbol{M}_O$ と，O' から見たモーメント $\boldsymbol{M}_{O'}$ の間に次の関係が成り立ちます．

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{R}$$

より，

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{A} + \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{A}$$

よって，

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{M}_{O'} + \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{A}$$

が成立します．このように，ある点でのモーメントが分かれば，別の点でのモーメントを知ることができます．

続きは こちら