剛体のオイラー角でのハミルトニアンを解く

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2010-03-03

剛体の回転シリーズ番外編 3 です．せっかく番外編 2 で剛体のハミルトニアンを求めたので，剛体のハミルトニアンを解いて剛体の運動方程式を導いてみました．

復習

まず，ハミルトニアンを確認します．剛体のハミルトニアンを次のようなものでした．

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2I_x \sin^2\theta}\{(p_\phi - \cos\theta p_\psi)\cos\psi - \sin\theta\sin\psi p_\theta\}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2I_y \sin^2\theta}\{(p_\phi - \cos\theta p_\psi)\sin\psi + \sin\theta\cos\psi p_\theta\}^2 \\ &\quad + \frac{p_\psi^2}{2I_z} \end{aligned} \tag{1}$$

パラメータ λ に対して，

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} \tag{2}$$

$$\dot{p}_\lambda = -\frac{\partial H}{\partial \lambda} \tag{3}$$

です．

それでは，さっそく式 (2) を求めてみましょう．

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} \\ &= \frac{1}{I_x \sin^2\theta}\cos\psi\{(p_\phi - \cos\theta p_\psi)\cos\psi - \sin\theta\sin\psi p_\theta\} \\ &\quad + \frac{1}{I_y \sin^2\theta}\sin\psi\{(p_\phi - \cos\theta p_\psi)\sin\psi - \sin\theta\cos\psi p_\theta\} \end{aligned} \tag{4}$$

ここで，次のように α, β, γ を定義します．

$$\alpha = \frac{\cos^2\psi}{I_x} + \frac{\sin^2\psi}{I_y} \tag{5}$$

$$\beta = \frac{1}{I_y} - \frac{1}{I_x} \tag{6}$$

$$\gamma = \frac{\sin^2\psi}{I_x} + \frac{\cos^2\psi}{I_y} \tag{7}$$

すると，式 (4) は，次のようになります．

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \frac{1}{\sin^2\theta}\alpha\ p_\phi + \frac{\sin\psi\cos\psi}{\sin\theta}\beta\ p_\theta \\ &- \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\alpha\ p_\phi\end{aligned} \tag{8}$$

まずは p_ϕ から，これはハミルトニアンが ϕ を含まないので簡単ですね．

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0$$

次に，p_θ．これは，難しいです．

$$\begin{aligned}\dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} \\ &= \frac{\cos\theta}{I_x\sin^3\theta}\{(p_\phi - \cos\theta p_\psi)\cos\psi - \sin\theta\sin\psi p_\theta\}^2 \\ &- \frac{1}{I_x\sin^2\theta}\{(p_\phi - \cos\theta p_\psi)\cos\psi - \sin\theta\sin\psi p_\theta\}(\cos\psi\sin\theta p_\psi - \cos\theta\sin\psi p_\theta) \\ &+ \frac{\cos\theta}{I_y\sin^3\theta}\{(p_\phi - \cos\theta p_\psi)\sin\psi + \sin\theta\cos\psi p_\theta\}^2 \\ &- \frac{1}{I_y\sin^2\theta}\{(p_\phi - \cos\theta p_\psi)\cos\psi - \sin\theta\cos\psi p_\theta\}(\sin\psi\sin\theta p_\psi + \cos\theta\cos\psi p_\theta)\end{aligned} \tag{9}$$

すると，式 (4) の続きは，

$$\begin{aligned}\dot{p}_\theta &= \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\alpha\ p_\phi^2 \\ &+ \frac{\sin\psi\cos\psi\cos\theta}{\sin^2\theta}\beta\ p_\phi p_\theta \\ &- \frac{1+\cos^2\theta}{\sin^3\theta}\alpha\ p_\phi p_\psi \\ &+ 0\times p_\theta^2 \\ &- \frac{\sin\psi\cos\psi}{\sin^2\theta}\beta\ p_\theta p_\psi \\ &+ \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\alpha\ p_\psi^2\end{aligned} \tag{10}$$

式 (8) を行列を使って表すと，

$$\dot{p}_\theta = \begin{pmatrix} p_\phi & p_\theta & p_\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\alpha & \frac{\sin\psi\cos\psi\cos\theta}{2\sin^2\theta}\beta & -\frac{1+\cos^2\theta}{2\sin^3\theta}\alpha \\ \frac{\sin\psi\cos\psi\cos\theta}{2\sin^2\theta}\beta & 0 & -\frac{\sin\psi\cos\psi}{2\sin^2\theta}\beta \\ -\frac{1+\cos^2\theta}{2\sin^3\theta}\alpha & -\frac{\sin\psi\cos\psi}{2\sin^2\theta}\beta p_\theta & \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_\phi \\ p_\theta \\ p_\psi \end{pmatrix} \tag{11}$$