ゲージ変換

佑弥@物理のかぎプロジェクト

2011 年 10 月 13 日

解析力学の要になるのは，変分原理であり，作用 I やラグランジアン L は最も基本的といっても良い物理量です．ラグラジアンによって現象が記述できるといっても言い過ぎではないでしょう．しかし，実は同じ運動を表現できるラグランジアンは不特定多数存在するのです!” 最も基本的な量がそんなことでいいの？” と呆れてしまいそうですが，この記事では，ラグランジアンがどのような性質を持つのかについて考えてみましょう．

同じ運動方程式を与えるラグランジアン

ここでもやはり，変分原理を使います．ラグランジアンが変わっても作用 I の第 1 変分が 0 となることが基本原理であることは，変わりません．

ある質点系の運動がラグランジアン $L(q, \dot{q}, t)$ によって記述できたとします．このとき作用 I は

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}; t)\mathrm{d}t$$

で定義されますね．

次に，ラグランジアンを新しく置き換えてみましょう．ここで，一般座標 q と時間 t の関数 $X(q, t)$ を考えます．このとき，新しいラグランジアンを L' として，

$$L'(q, \dot{q}; t) = L(q, \dot{q}; t) + \frac{\mathrm{d}X(q, t)}{\mathrm{d}t}$$

を定義してみましょう．新しいラグランジアンが定める作用を I' としますと，

$$\begin{aligned} I' &= \int_{t_1}^{t_2} \left(L + \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\ &= I + X(q(t_2), t_2) - X(q(t_1), t_1) \end{aligned}$$

と計算できます．今調べたいのは，新しいラグランジアンがどのような運動方程式を与えるのか，ということですから作用 I' の変分をとります．運動方程式を求めるとき，一般座標の変分 δq_k は運動の最初と

終わりで 0 とするのでしたから，$X(q(t_2),t_2)$ と $X(q(t_1),t_1)$ は経路を変更しても変化しません．つまり，それらの変分は 0 となって消えてくれますから，

$$\delta I' = \delta I$$

となります．つまり，二つのラグランジアン L と L' は同じ運動方程式を与えることが分かりますね．このようにラグランジアンの変換には，運動方程式にまったく影響がないものが存在するのです．

このように運動方程式を変化させない変換を総称してゲージ変換と呼びます．具体的な問題では，ラグランジアンを少し簡単にできることもありますし，理論的考察を行うときに便利なこともあるでしょう．(具体的な問題を解くときはラグランジアンを簡単にして運動方程式を簡単に導くことができることはありますが，最終的に解く方程式は変化しないのでそこは誤解しないでください．)

この記事の結果は，ハミルトンの正準方程式を考察していくときに使う予定ですが，それまでは忘れてしまっても苦労はしないでしょう．もしそのときに忘れていたとしても，さっと復習するだけで十分に理解できると思います．

でも一回理解しておくと自分で導くのも簡単でしょうから，ラグランジアンは一意に表せないってことだけは覚えていたら良いかもしれませんね．