標本化定理

@物理のかぎプロジェクト

ある関数 $h(t)$ を，フーリエ変換やフーリエ級数を使って，周波数関数 $H(f)$ で再現するには，いったいどれくらいの範囲の周波数 f の成分が必要になるんでしょうか？逆に，使える周波数成分の範囲が決まっているとき，どのような関数なら再現できるのでしょうか？？この問題は，工学上，とても重要なことです．なぜなら，どれくらいの周波数 (周期) 成分を使えば，どのような情報が記録できるのかが，この制限から決まってくるからです．

標本化って何？？

当たり前の話ですが，私たちが普段生活しているこの世界は，「ビデオのコマ送りのように，時が途切れ途切れに流れている」とは普通は考えません．途切れていない，連続な世界なのです．しかし，そんな連続な世界で起こっている何かを，データとして記録したいときは，途切れ途切れな時間の間隔で連続な時間を区切って，データを記録します．ちょうど，コマ撮りの写真のように，です．

このように，途切れ途切れの時間または空間の間隔で，連続な世界を区切ることを **標本化する** (サンプリングする) といいます．

//画像を載せる予定．

標本化定理

冒頭に書いた問題の答えを出してくれるのが，$**$標本化定理$**$ (サンプリング定理) と呼ばれるものです．まだ,「こんな定理の名前なんて初めて聞いた！」という方には，使える周波数の範囲が正しくないと，関数が正しく再現できないということも，イメージがあまり掴めないと思います．このイメージに関しては，後のセクションで実際に例を出していますので，このセクションでは「標本化定理とやらを守っていれば，フーリエ級数を使って関数を完全に再現できるんだ」ということだけ，納得しておいてください．

さて，本題に入りましょう．標本化という言葉を使って，冒頭の問題をもう一度確認してみると,「連続な関数 $h(t)$ をどのくらいの間隔 (周期や周波数) で標本化すれば，もとの $h(t)$ を完全に再現できるのだろうか？」ということですね．

そして，以下が標本化定理です．

theorem

ある関数 $h(t)$ を周波数関数 $H(f)$ で再現するためには，$h(t)$ に含まれる最大周波数 $f_{\max}$ の 2 倍以上の周波数成分を $H(f)$ が含んでいなければいけない．

上の定理を周期についても，言ってみましょう．つまり・・・

ある関数 $h(t)$ を周期関数 $H(f)$ で再現するためには，$h(t)$ に含まれる最小周期 $T_{\min}$ の $1/2$ 倍以下の周期成分を $H(f)$ が含んでいなければいけない．

ということです．