フレネル回折からみたレンズの公式

someone @物理のかぎプロジェクト

Date: tmp28774:5: (WARNING/2) Cannot extract empty bibliographic field “Date”.

天体望遠鏡で大口径のレンズが望まれるのはなぜでしょうか．ここではフレネル回折の性質を用いたレンズの公式の導き方と開口部の影響の計算の仕方を紹介します．計算に作用素代数を用いているのが特徴です．

フレネル回折の簡易モデル

z 軸方向に進む平面波が xy 平面内に置かれた開口を通過するときのフレネル回折の式

$$u'(x',y') = \frac{A}{i\lambda R} e^{ikR} \iint g(x,y) e^{\frac{ik}{2R}\{(x'-x)^2+(y'-y)^2\}} dxdy$$

から出発します [1]．ここで $u'(x',y')$ は点 $(x',y',R)(R>0)$ における波面（のフェーザ），$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ は波長，$g(x,y)$ は（開口部で 1，遮蔽部で 0 となる）開口関数です*1．

$h(x,y) = e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda R}$ とおくと，畳み込み積分

$$(g*h)(x',y') = \iint g(x,y)h(x'-x,y'-y)dxdy$$

を使って $u'(x',y')$ を

$$u'(x',y') = \frac{A}{i\lambda R} e^{ikR} (g*h)(x',y')$$

と表すことができます．また $h(x'-x,y'-y) = h(x',y')h(x,y)e^{-i2\pi(x'x+y'y)/\lambda R}$ ですから

$$u'(x',y') = \frac{A}{i\lambda R} e^{ikR} h(x',y') \iint g(x,y)h(x,y)e^{-i2\pi(x'x+y'y)/\lambda R} dxdy$$

が成立します．すなわち $u'(x',y')$ は $g(x,y)h(x,y)$ の 2 次元フーリエ変換を λR 倍に拡大した関数に $\frac{A}{i\lambda R}e^{ikR}h(x',y')$ をかけたものに等しくなります．このことは $g(x,y)$ が文字の形に切り抜かれた開口でも，さらに開口の直前に適当な光学素子をおいたとして $g(x,y)$ を複素数値の関数 $u(x,y)$ で置換したときでも変わりません．ただし，フレネル近似が成立するためには $u(x,y)$ の 0 でない部分は R に比べて十分小さいことが必要です．

*1 z 軸に垂直な平面波の波動は $Ae^{i(\omega t-kz)}$ のように表されますが，時間変化を表す $e^{i\omega t}$ は空間内で共通なので，通常は残りの部分（フェーザ）だけを考えます．

人が知覚したり，媒体に記録するのは波面 $u'(x',y')$ そのものでなく，強度分布 $|u'(x',y')|^2$ です．上記の式に含まれる e^{ikR} は x, y に依存しない定数なので，フレネル回折の簡易モデルとして，以下では

$$u'(x,y) = \frac{1}{i\lambda R}(u * h)(x,y)$$

を考えましょう（後述の光学素子も同様にモデル化します）．

2次元フーリエ変換の公式

点 (x,y) での値が $u(x,y)$ である関数 u を，点 (x',y') での値が

$$u'(x',y') = \iint u(x,y)e^{-i2\pi(xx'+yy')}dxdy$$

である関数 u' に変換する写像 F を（2次元の）フーリエ変換といい，$u' = Fu$ とかきます．$u'(x',y') = (Fu)(x',y')$, $u'(x,y) = (Fu)(x,y)$ です．一般に関数を関数に変換する写像を作用素といいます．例えば微分作用素はある関数をその導関数に変換します．

u を点 (x,y) での値が $v(x,y)u(x,y)$ である関数や $u(x/a,y/a)$ である関数，$u(x-a,x-b)$ である関数に変換する写像も作用素です．以下ではこれらの作用素を $\{v\}$, M_a, $S_{a,b}$ で表します．すなわち，

$$(\{v\}u)(x,y) = v(x,y)u(x,y)$$

$$(M_a u)(x,y) = u(x/a,y/a)$$

$$(S_{a,b}u)(x,y) = u(x-a,y-b)$$

です．ここで，v は任意の関数，a, b は任意の定数で，慣例に従って

$$(au+bv)(x,y) = au(x,y) + bv(x,y)$$

と考えます．また，以下でよく使う次の関数もここで定義しておきましょう．

$$\theta_a(x,y) = e^{i\pi a(x^2+y^2)}$$

$$\phi_{a,b}(x,y) = e^{i2\pi(ax+by)}$$

よく知られているように，フーリエ変換について次の公式が成立します．

1. $F(v*u) = (Fv)(Fu)$ したがって $v*u = F^{-1}\{Fv\}Fu$
2. $FM_a = a^2M_{1/a}F$
3. $FS_{a,b} = \{\phi_{-a,-b}\}F$, $S_{a,b}F = F\{\phi_{a,b}\}$
4. $F^2 = M_{-1}$ したがって $F^4u = u$, $F^{-1}u = FM_{-1}u$
5. $F\phi_{a,b} = S_{a,b}\delta$, $F\theta_{-a} = \{\frac{1}{ia}\theta_{1/a}$

ここで δ は

$$\iint v(x,y)\delta(x,y)dxdy = v(0,0), \qquad v(x,y)=0 \quad ((x,y)\neq(0,0))$$

という性質をもつ 2 次元のデルタ関数です．これらの記号を用いると，簡易化したフレネル回折の作用素 $D_{\lambda d}$ を

$$D_{\lambda d} = F^{-1}\{\theta_{-\lambda d}\}F$$

で定義でき，さきに積分形式で示したように

$$D_{\lambda d} = \frac{1}{i\lambda d}\{\theta_{1/\lambda d}\}M_{\lambda d}F\{\theta_{1/\lambda d}\}$$

が成立します．$D_{\lambda b}D_{\lambda a} = D_{\lambda(a+b)}$ であることは

$$F^{-1}\{\theta_{-\lambda b}\}FF^{-1}\{\theta_{-\lambda a}\}F = F^{-1}\{\theta_{-\lambda b}\theta_{-\lambda a}\}F = F^{-1}\{\theta_{-\lambda(a+b)}\}F$$

で容易に確認できます．

レンズの公式

z 軸方向の位相変化を無視すると，開口が十分に広く，焦点距離が f である凸レンズの機能は作用素 $\{\theta_{-1/\lambda f}\}$ で表され，

$$D_{\lambda b}\{\theta_{-1/\lambda f}\}D_{\lambda a} = \left\{\frac{1}{i\lambda b}\theta_{1/\lambda b}\right\}M_bF\left\{\frac{1}{i\lambda a}\theta_{1/\lambda b}\theta_{-1/\lambda f}\theta_{1/\lambda a}\right\}M_aF\{\theta_{1/\lambda a}\}$$

より，$\theta_{1/\lambda b}\theta_{-1/\lambda f}\theta_{1/\lambda a} = \theta_0$ すなわち

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$$

であれば

$$D_{\lambda b}\{\theta_{-1/\lambda f}\}D_{\lambda a} = \left\{-\frac{a}{b}\theta_{1/\lambda b}\right\}M_{-b/a}\{\theta_{1/\lambda a}\}$$

$$|(D_{\lambda b}\{\theta_{-1/\lambda f}\}D_{\lambda a}u)(x,y)|^2 = \left|\frac{a}{b}u\left(-\frac{a}{b}x,-\frac{a}{b}y\right)\right|^2$$

が成立します．これがレンズの公式です．

レンズの開口関数 g を無視できないときは $u' = D_{\lambda a}\{g\}D_{-\lambda a}u$ とおいて g の影響を解析できます．

$$u' = \left\{\frac{1}{i\lambda a}\theta_{1/\lambda a}\right\}M_{\lambda a}F\left\{-\frac{1}{i\lambda a}g\right\}M_{-\lambda a}F\{\theta_{-1/\lambda a}\}u = \{\theta_{1/\lambda a}\}F^{-1}\{M_{-1/\lambda a}g\}F\{\theta_{-1/\lambda a}\}u$$

ですから，u' は $u' = \{\theta_{1/\lambda a}\}(FM_{1/\lambda a}g * \{\theta_{-1/\lambda a}\}u)$ と表され，開口が狭くなると Fg がデルタ関数で近似できなくなり，畳み込み積分によって $\{\theta_{-1/\lambda a}\}u$ がぼけてきます．これが大口径のレンズが望まれる理由です．

一般に u' の強度分布は u のコヒーレンシー（可干渉性）に依存します．線形の作用素 T を用いて $u' = Tu$ と表される光学系に対して $K(x', y', x, y) = (TS_{x,y}\delta)(x', y')$ と定義しますと，u の各点の位相が完全に同期している場合は

$$|u'(x', y')|^2 = \left| \iint K(x', y', x, y) u(x, y) dxdy \right|^2$$

u の各点の位相が完全にランダムの場合は

$$|u'(x', y')|^2 = \iint |K(x', y', x, y)|^2 |u(x, y)|^2 dxdy$$

で求められます．なお，$K(x', y', x, y) = K'(x' - x, y' - y)$ となる K' が存在するとき FK' を光学伝達関数といいます．

あとがき

フーリエ光学に限らず，情報を変換する物理系や機器の機能を解析するとき，作用素を用いてモデル化すると分かりやすくなることが少なくありません．このことを例示するのが本資料の趣旨なので公式の証明は割愛しました．