

ウェッジ積の座標変換

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-11-06

実数上の n 次元ベクトル空間 R^n の一つの基底を $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ とし, これと異なる基底 $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ への座標変換 T を考えます.

$$T: \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \mapsto \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\} \quad (1)$$

この変換 T の表現行列を $A = [a_{ij}^j]$ とします. この行列を使うと, 式 (1) は $e'_i = a_{ij} e_j$ と表わされますので, 例えば二階のウェッジ積の座標変換は次のようになります.

$$e'_i \wedge e'_j = a_i^k e_k \wedge a_j^l e_l = a_i^k a_j^l e_k \wedge e_l \quad (2)$$

右辺は縮約によって和になっていますから, 実際に展開して全部の項を書き出すのは大変です. しかし, 原理としては, 普通のベクトル空間 R^n の座標変換式をウェッジ積の関係式に代入するだけです. 似たような計算はテンソル代数で何度も見てますから, 何も難しいことは無いと思います.

n の基底の変換

特に $\wedge^n R^n$ の基底 (最高次数の外積空間) $e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n$ の座標変換を考えてみましょう. $\wedge^n R^n$ は一次元空間ですから ($\dim \wedge^n R^n = {}_n C_n = 1$), 基底の写像にはスカラー倍しかありません. では, そのスカラーはどのような値なのかと言うと, $\det A$ になるのです. これは大変にシンプルな結果です.

theorem

$$e'_1 \wedge e'_2 \wedge \dots \wedge e'_n = \det A (e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n)$$

*1 いままで, ベクトル空間の記号に V を多く使ってきましたが, 今後, 実数上という意味と次元を強調して R^n と書くようにします. ユークリッド空間 E^n もミンコフスキー空間 M^4 も実数上のベクトル空間ですので, まとめて R^n と書けます. 特に区別する場合には, E^n とか M^4 と書くことにします.

proof

定義通りに座標変換をすると $e'_1 \wedge e'_2 \wedge \cdots \wedge e'_n = a_{1p_1} e_{p_1} \wedge a_{p_2} \wedge \cdots \wedge a_{np_n} e_{p_n}$ と書けますが (*), 右辺は更に行列成分を外に出して $\sum_{p_1, p_2, \dots, p_n} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} e_{p_1} \wedge e_{p_2} \wedge \cdots \wedge e_{p_n}$ と変形できます。ここで、もし p_k ($k = 1, 2, \dots, n$) の中に同じ数字が二回出てくれば、ウェッジ積の性質よりその項は 0 になりますので、 p_k は全て異なる数字であり、結局、 \sum は、1 から n の数字の異なる順列について総和を取るという意味になります。 p_k の順列を $\varepsilon(p_1 p_2 \dots p_n)$ と書くことにすると、(*) 式右辺は $\sum \varepsilon(p_1 p_2 \dots p_n) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} e_{p_1} \wedge a_{p_2} \wedge \cdots \wedge a_{np_n} e_{p_n}$ となりますが、これは **行列式の定義** より、 $\det A(e_{p_1} \wedge a_{p_2} \wedge \cdots \wedge a_{np_n} e_{p_n})$ と書けます。

この結果は『空間の向き』を考えると特に重要になります。例えば三次元で $\wedge^3 R^3$ を考えると、基底には $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ の形のもの一つしかありません。いま $\{e_1, e_2, e_3\}$ を正規直交基底だとし、長さを変えないように座標変換として直交変換だけを考えると、直交行列の行列式には ± 1 の二つがあります。つまり、上の定理により、座標変換後の基底は $e'_1 \wedge e'_2 \wedge e'_3 = \pm e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ と表わされるということです。

これだけでは、まだ何が重要なのか分かり難いかも知れません。では、少し先走って、微分形式の話まで触れましょう。微分形式の理論の中では、外積空間の基底として、積分計算に出てきた微小量 $\{dx, dy, dz\}$ を考えますが、 $dx \wedge dy \wedge dz$ は、今まで体積素として体積分のときに考えていた dV に相当する量になります。これを先ほどの座標変換式にそのまま宛てはめれば、 $dV' = \pm dV$ という意味に解釈できますね。体積の符号が変わる?? これを見て、ムムウと思って欲しいところです。これと似た話が **ベクトル三重積** にありました。ベクトルの張る平行六面体の体積の符号が、右手系 左手系を入れ替えたときに変わるという話でした。まさに、先ほどの公式はベクトル三重積の符号と右手系 左手系の符号を説明するものになっているのです。とは言うものの、まだ多くの読者の方にとっては、旧来のベクトル解析（特にベクトルの積分）に、外積代数の理論をどう使えるのか、その辺りの関係がまだ明快ではないと思います。詳しくは、微分形式の理論でベクトルの積分定理を考え直す中で整理して行く予定ですので、焦らずゆっくり進みましょう。