オイラー方程式

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2009-10-03

剛体の回転シリーズ第７弾です．前の記事は 加速度座標系と慣性力 です．次の記事は テニスラケットの定理 です．

オイラー方程式

オイラー方程式を導きます．オイラー方程式というのは，回転する座標系からみた，回転の変化を調べる方程式です．角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転する座標から見た角運動量はベクトルですので，加速度座標系と慣性力 で導いた式 (1) を適用できます．

つまり，任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ に成り立つ式

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{\delta \boldsymbol{A}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{A} \tag{1}$$

で，[*1] $\boldsymbol{A}$ に角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ を代入してやって，

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{\delta \boldsymbol{L}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L} \tag{2}$$

ここで，慣性モーメント で書いた慣性主軸を座標系として採用すると，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= I_I \boldsymbol{\omega} \\ &= \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

よって，

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1\omega_1 \\ I_2\omega_2 \\ I_3\omega_3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

---

*1 $\frac{\delta \boldsymbol{A}}{\delta t}$ とは，回転座標系からみた見かけの変化ベクトルでした．

ここで，角運動量 の式 (3) を思い出しますと，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N} &= \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} \\
&= \frac{\delta \boldsymbol{L}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L} \\
&= \begin{pmatrix} I_1 \frac{\delta \omega_1}{\delta t} \\ I_2 \frac{\delta \omega_2}{\delta t} \\ I_3 \frac{\delta \omega_3}{\delta t} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{I_I} \boldsymbol{\omega} \\
&= \begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_2 I_3 \omega_3 - \omega_3 I_2 \omega_2 \\ \omega_3 I_1 \omega_1 - \omega_1 I_3 \omega_3 \\ \omega_1 I_2 \omega_2 - \omega_2 I_1 \omega_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_3 \omega_2 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1 \omega_3 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2 \omega_1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5}
$$

となります[*2].

長くなったのでこの式をもう一度書きなおすと，

$$
\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_3 \omega_2 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1 \omega_3 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2 \omega_1 \end{pmatrix} \tag{6}
$$

となります．この式 (6) をオイラー方程式と呼びます．次回は，このオイラー方程式を用いて，テニス・ラケットの定理と言うものを導きます．

ちなみに慣性主軸以外の静止座標系（上の議論と区別するため * をつける.）から見た回転の方程式は，

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} &= \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} \\
&= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^* \\ \omega_2^* \\ \omega_3^* \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{7}
$$

となりますが，慣性モーメント I が時間変化するため，複雑になってしまいます．

続きは こちら

[*2] ここで，加速度座標系と慣性力 の式 (4) の次にくる式，$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{\delta \boldsymbol{\omega}}{\delta t} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ を用いました．