スカラー関数の線積分

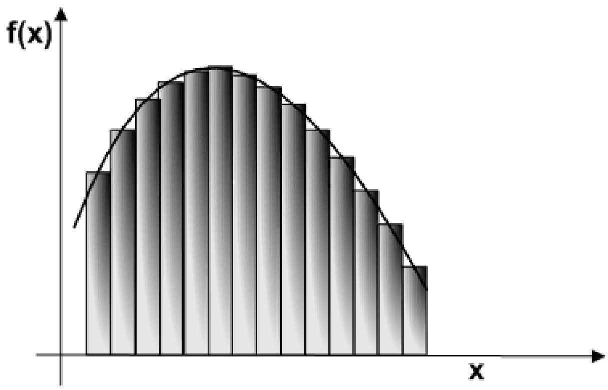
Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-10-11

この記事では，線積分という積分を勉強します．次の記事以降ではベクトルの線積分を考えますが，まず線積分という計算になれるためにスカラーを線積分するところから始めようと思います．解析学的な立場で厳密に考えることはしません．あくまで，直観的なイメージ重視でいきます．

線積分

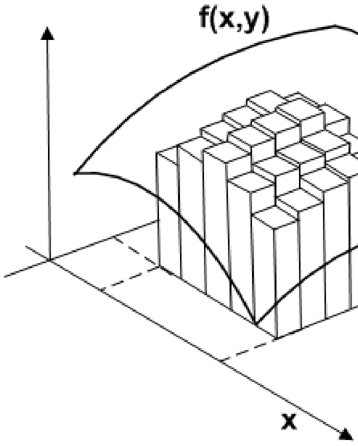
高校で最初に積分を習ったとき，次図のようなイメージを使った人が多いかと思います．



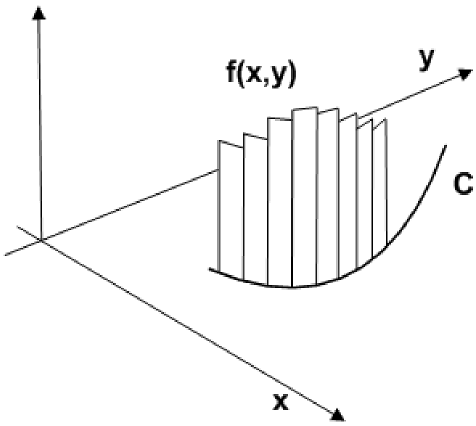
変数 x の各点で定義される関数 $f(x)$ の値に Δx を掛け，この微小面積を x の全範囲に渡って足し合わせた量を考えます．図では，短冊状の長方形領域が幾つか描かれていますが，この幅を極限まで狭くし，かわりに無限に多くの短冊状領域を考えた極値的が $\int_{x_1}^{x^2} f(x)dx$ という量になります．動的なイメージとしては，この積分は変数 x が x 軸という **直線の上** を x_1 から x_2 まで動くとき，時々刻々 $f(x)$ の値を足していった総和が積分だと考えても良いでしょう．ここまでは，高校数学の復習です．

さて，二変数関数 $f(x,y)$ を積分するときも要点は全く同じで，各点 (x,y) で定義される関数 $f(x,y)$ の値を全範囲に渡って足し合わせることを考えますが，『 x と y がどう動くか』という点について，もう少しよく考えないといけません．一変数の場合は変数の動き方は一次元的で，**積分区間** と呼べるものでしたが，二変数の場合，変数 x,y が xy 平面上でどのような領域を動くのかを考えないといけません．積分領域は xy 平面上で何か平面図形になるでしょう．例えば，次図は積分領域が長方形の場合のイメージ図です．各点 (x,y) で定義される関数 $f(x,y)$ の値に $\Delta x\Delta y$ を掛けた四角柱の **体積** を，全体に渡って足し

合わせるイメージです．|064cb6fda6922748c28e702d89c98984|，$\Delta y \to 0$ の極限を取り，その代わりに無限に多くの四角柱を考えることにすれば，積分 $\int\int f(x,y)dxdy$ を得ます．



今のような話は，重積分を勉強したことがある人は知っていると思います．また，積分領域が曲線である積分を **線積分** と呼びます．線積分は，最初の短冊型領域の面積を足していくイメージで考えれば良いですが，短冊型領域を考えるのは直線上ではなく曲線上になります．



曲線を C，関数を $f(x,y)$ として，線積分は次のように表わされます．ds を曲線の微小な弧の長さとすると，$f(x,y)ds$ が微小短冊型領域の面積になります．（ ds については 空間曲線と接線の方程式 を参照してください．）

$$\int_C f(x,y)ds \tag{1}$$

もし，C が空間曲線なら三変数で次のようになります．

$$\int_C f(x,y,z)ds \tag{2}$$

弧長パラメーター ds に関して，デカルト座標系なら $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ と書けて，ベクトル表示で $d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{e_x}dx + \boldsymbol{e_y}dy + \boldsymbol{e_z}dz$ のように表わすことも可能です．普通は $d\boldsymbol{s}$ とか書かずに $d\boldsymbol{r}$ と書きます．

*1 四次元以上の線積分を考えることはあまりありませんが，同じように変数を増やすことで何次元にでも拡張できます．

線積分をベクトル表示にすれば，以下のようになります．

$$\int_C f(x,y,z)d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e_x}\int_C f(x,y,z)dx + \boldsymbol{e_y}\int_C f(x,y,z)dy + \boldsymbol{e_z}\int_C f(x,y,z)dz \tag{3}$$

線積分の計算

実際に線積分を計算するときには, 積分経路となる曲線の方程式が必要です．例えば, 曲線が $f(x,y,z)=0$ の形で与えられるとき，この曲線に沿って x,y,z がどう動くのかを記述するのはかなり面倒です（方程式 $f(x,y,z)=0$ を解くのと同じ手間がかかります.）．もし，曲線がパラメーター表示できるなら，『曲線上を点 M_1 から M_2 まで動く』という条件を『パラメーター t が 0 から 1 まで動く』のように言い換えることができ，実質的に一変数の積分にまで問題を簡単化することが出来ます．パラメーター表示がお薦めです．

$$\boldsymbol{e_x}\int_C f(x,y,z)dx + \boldsymbol{e_y}\int_C f(x,y,z)dy + \boldsymbol{e_z}\int_C f(x,y,z)dz = \boldsymbol{e_x}\int_C f(x,y,z)\frac{dx}{dt}dt + \boldsymbol{e_y}\int_C f(x,y,z)\frac{dy}{dt}dt + \boldsymbol{e_z}\int_C f(x, \tag{4}$$

練習問題 1

曲線 C： $(x,y,z)=(a\cos t, a\sin t, bt)$ に沿って，関数 $f(x,y,z)=x^2+2y+z$ の線積分 $\int_C f(x,y,z)ds$ を求めて下さい．t は 0 から π まで動くものとします．

ヒント：まず，f を t だけで表わしましょう．そして $\frac{ds}{dt}dt$ を求めましょう．$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ を使ってください．

練習問題 2

曲線 C： $(x,y,z)=(t,t^2,t^3)$ $(0\leq t\leq 1)$ に沿って，関数 $f(x,y,z)=xyz$ の線積分 $\int_C f(x,y,z)d\boldsymbol{r}$ を求めて下さい．

ヒント：まず，f を t だけで表わしましょう．成分毎に $\frac{dx}{dt}dt$, $\frac{dy}{dt}dt$, $\frac{dz}{dt}dt$ を求めてください．