# 線形演算子

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2007-02-26

前の記事は，ブラベクトルとケットベクトル．次の記事は，ブラケットや線形演算子の複素共役 です．

## ケットと線形演算子

前の記事では，ブラはケットと組み合わさることでスカラー値を生成する線形関数のことでした．今度考える線形演算子は，ケットと組み合わさることで，ケットを生成する線形関数です．あるケット $|A\rangle$ の関数である $|F\rangle$ を考えます．この二つのベクトルは，成分が定数である定ベクトルではなく，成分に変数を含みます．$|A\rangle$ に対応するケットを $|F_A\rangle$ と書くことにすると，線形関数が線形であるための条件を表すことができます．$|A\rangle + |A'\rangle$ は $|F_A\rangle + |F'_A\rangle$ に対応し，$c$ を定数とすると $c|A\rangle$ は $c|F_A\rangle$ に対応するという条件です．この条件の下で $|F\rangle$ は $|A\rangle$ に線形演算子 $\alpha$ を施したものとして，

$$|F\rangle = \alpha|A\rangle$$

と表します．演算子が線形であるための条件をあらためて書くと

$$\alpha\{|A\rangle + |A'\rangle\} = \alpha|A\rangle + \alpha|A'\rangle \tag{1}$$

$$\alpha\{c|A\rangle\} = c\alpha|A\rangle \tag{2}$$

となります．

線形演算子は，すべてのケットに対して値が与えられた時，完全に定義されます．そしてすべてのケットに対し，ゼロベクトルを生じる演算子はゼロとします．またすべてのベクトルに対し，二つの演算子が同じケットを生じる時，二つの演算子は等しいといいます．

次に線形演算子の和を次のように定義します．

$$\{\alpha + \beta\}|A\rangle = \alpha|A\rangle + \beta|A\rangle \tag{3}$$

式 (1) と (3) から線形演算子とケットは分配法則を満たします．

そしてまた二つの演算子は掛け合わせることができます．

$$\{\alpha\beta\}|A\rangle = \alpha\{\beta|A\rangle\}$$

よって結合法則が成り立ち，これはかっこを省略して $\alpha\beta|A\rangle$ と書きます．一般的には交換法則は成り立たず，

$$\alpha\beta|A\rangle \neq \beta\alpha|A\rangle \tag{4}$$

となってしまいます．これの特別な場合で式 (4) が等号になるとき二つの演算子は交換可能であるといいます．

もしケットを定数 $k$ 倍する操作を考えると，$k$ は線形演算子の特殊な場合となります．$k$ 倍はケットをケットに移し，式 (1) と式 (2) の $\alpha$ を $k$ で置き換えると満たすからです．このとき，この定数はすべての線形演算子と交換可能です．

## ブラと線形演算子

ここまでは，ケットに演算子を作用させることを考えてきましたが，今度はブラに作用させてみます．任意のブラ $\langle B|$ と $\alpha|A\rangle$ のスカラー積を作ります．このスカラー積はケット $|A\rangle$ に線形に依存します．よってブラはケットと組み合わさって線形なスカラー積を作るものという定義から，このスカラー積はケット $|A\rangle$ にあるブラが作用したものと考えられます．そのブラはやはり $\langle B|\alpha|A\rangle$ が $\langle B|$ にも線形に依存することから，$\langle B|$ にある線形演算子 $\beta$ が作用したものと考えられます．この $\beta$ は $\alpha$ に対し一意的に決定されるので，この演算子 $\beta$ をケットに対する演算子と同じ $\alpha$ という文字で表すと合理的です．式で表すと

$$\{\langle B|\beta\}|A\rangle = \{\langle B|\alpha\}|A\rangle \equiv \langle B|\{\alpha|A\rangle\}$$

これが $\langle B|\alpha$ の定義式です．

## ブラとケットのダイアド積

今度は，$|A\rangle\langle B|$ という積を考えてみます．任意のケット $|P\rangle$ を右から掛けてみます．すると，$|A\rangle\langle B|P\rangle$ となり $|A\rangle$ のスカラー $\langle B|P\rangle$ 倍のケットベクトルになります．しかも，$|P\rangle$ に対し線形性を持っています．また，$\langle Q|$ を左から掛ける操作に対しても，同様に線形性を持ったブラになります．このことから，$|A\rangle\langle B|$ は線形演算子だと分かります．後ほど別の記事で行列表示について書きますが，その行列表示をすると，この積はダイアド積であることも分かります．ダイアド積のことは，続ベクトルの回転 の中ほどに書いてあります．

## 物理的意味

これまでベクトルや演算子について考えてきました．結合法則と分配法則は成り立ちましたが，交換法則だけは成り立ちませんでした．それらのベクトルや演算子と現実の物理系との関係に対して，量子力学ではどう解釈しているのかについて書きます．ベクトルはある時間の系の状態に対応しています．ただし

その大きさや位相因子 $e^{i\gamma}$ （ただし $\gamma$ は実数）は意味を持ちません，方向なのは重要です．そして線形演算子は，その時間の物理的変数に対応します．物理的変数とは古典力学もこれらが組み上げていますが，位置，一部分の速度，粒子の運動量や角運動量，またハミルトニアンなどそれらでできる関数です．この概念が量子力学でも出てくるのです．ただし決定的な違いとして，古典力学では交換法則は成り立ちましたが，量子力学では交換法則は成り立ちません．それでも古典力学に対応した概念が多くあり，古典力学に類似した理論が組み上げられていきます．