

代数的数と超越数

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-06-24

一つの前の記事 [代数方程式の性質](#) で代数方程式を定義しました。

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

特に、有理係数の代数方程式の解を代数的数と呼びます。例えば $\sqrt{2}$ や i は、 $x^2 - 2 = 0$ 、 $x^2 + 1 = 0$ といった有理係数代数方程式の解ですから代数的数です。 $\sqrt[100]{2}$ もやはり $x^{100} - 2 = 0$ という有理係数代数方程式の解ですから代数的数です。一方、 $\sqrt{\pi}$ は $x^2 - \pi = 0$ という代数方程式の解ではありますが、係数 π が有理数ではありませんので、この例を見る限り $\sqrt{\pi}$ は代数的数ではありません。

しかし、他に π を解とする、有理係数の代数方程式は一切存在しないと言えるのでしょうか？世の中には無限に代数方程式があるわけですから、どんな数だって、何らかの代数方程式の解になっているということないでしょうか？実は、世の中の仕組みはそうはなっていません。どうしても代数方程式の解にはならない数が無数に存在します。これらを超越数と呼びます。

超越数の有名な例には π , e , $2^{\sqrt{2}}$ 等があります。ある数が代数的数であることを証明するのは簡単ですが、超越数であることを証明するのはとても難しいことです。 π が超越数であることの証明は 1882 年、リンデマン (Ferdinand von Lindemann (1852-1939)) によってなされましたが、とても難しいものだそうです。



図 1 (π が超越数であることを証明したリンデマン)

練習問題 1

一般に, $a + \sqrt[c]{b}$ ($a, b, c \in \mathbb{Q}$) の形をした数は代数的であることを示して下さい。(ヒント: このような数を x と置いて, 移項したり累乗したりして代数方程式を作ってみましょう.)

練習問題 2

$\cos(k\pi)$ は k が有理数であるときに代数的数であることを示して下さい。(ヒント: 加法定理を使ってみましょう.)