先端放電

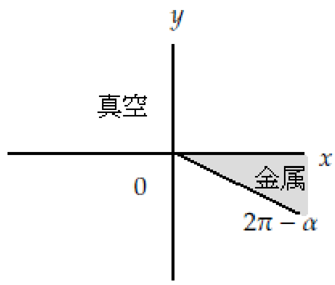
クロメル@物理のかぎプロジェクト

2010-11-21

注意：この記事にはおそらく間違いがあります．金属の電位を与えていないのに，静電ポテンシャルが出てきています．注意してください．

電荷が作る電場は，尖ったものの先端において，大きくなり電子を放出しやすくなります．どんな電界が生じるのかを書くことにします．

簡単のため，下図の様な二次元極座標 (r, θ) で考えます．金属表面は等電位面であります．しかし，表面電荷はそんざいします．



真空におけるラプラス方程式は，

$$\triangle V(r,\theta) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) V(r,\theta) = 0 \tag{1}$$

ここで，変数分離法を用い，r 方向と θ 方向の常微分方程式に還元してやります．つまり，$V(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ と仮定して，式 (1) に代入するのです．すると，

$$r \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial R}{\partial r}) * \Theta + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} R = 0 \tag{2}$$

両辺 $R\Theta$ で割って，移項すれば，

$$r \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial R}{\partial r}) / R = - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} / \Theta \tag{3}$$

これは，左辺が r のみの関数，右辺が θ のみの関数なので，r の式ではなく，θ の式でもなく，これは実定数 $(k > 0)$ の二乗 k^2[*1] に等しいことが分かります．

[*1] k^2 が負だと r 方向の方程式が，虚数の解をもつことになるので，物理的に意味のない方程式になります．

よって，この式は,

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} = -k^2\Theta \tag{4}$$

$$r\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial R}{\partial r}) = r\frac{\partial}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} = k^2R \tag{5}$$

式 (4) は，単振動でお馴染みの式ですね．これをとくと,

$$\Theta = A\sin(k\theta + \phi) \tag{6}$$

境界条件 $\theta = 0, 2\pi - \alpha$ の時，$k \times 0 + \phi = 0$, $k(2\pi - \alpha) + \phi = \pi$ とします．つまり，$\phi = 0$, $k = \dfrac{\pi}{2\pi - \alpha}$ となります.

これで，θ 方向は解けました．次は動径方向です．$R = r^d$ と仮定すると，式 (5) より,

$$r \times dr^{d-1} + r^2 \times d(d-1)r^{d-2} = k^2r^d \tag{7}$$

よって，$d^2 = k^2$ が得られます．無限遠でポテンシャルが発散しないために，$d = -k < 0$ が必要となります.

以上合わせて，ポテンシャル $V = R\Theta$ は,

$$V(r,\theta) = r^{-k}\sin k\theta \quad (\text{when} \ \ k = \frac{\pi}{2\pi - \alpha}) \tag{8}$$

ここで，物理的な解釈をすると，金属の尖り方が，十分鋭い ($\alpha \to 0$) 時では，ポテンシャルは，$r^{-1/2}$ に近づいていきます．それだけ，頂点には大きな電場が生じるのです.

それでは，今日はここまで.