行列の階数を区別するものは何か？

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2009-08-16

みなさんは，n 次行列 A の $rankA$ について，$rankA = n$ の時，正則なのはわかった，じゃあ，$rankA < n$ の時は，どんな性質を持っているのだろう．特に $rankA = i, j \quad (i, j < n, i \neq j)$ の時，i と j の違いは？と考えたことはありませんか？その疑問の一つに答えるのが，この記事です．数学になれている方は，「具体例」を飛ばして，「定理」まで飛んでしまって構いません．

具体例

まずは，次の二次正方行列 ($\dim S = 2$) の違いを調べてみましょう．

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ kt_{11} & kt_{12} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで, k はある 0 でない実数です．これらの行列は, 上から順に $rank\ S = 2$, $rank\ T = 1$, $rankU = 0$ です．この内，S は，$\det S \neq 0$ として区別がつきます．では，T と U は，どうやって区別したらいいのでしょうか？

僕は，試しに固有方程式を思い出して，$\det(T - \lambda I)$ と $\det(U - \lambda I)$ （ただし，λ はある数，I は単位行列）を作ってみることにしました．

すると，

$$\begin{aligned} \det(T - \lambda I) &= (t_{11} - \lambda)(kt_{12} - \lambda) - kt_{11}k_{12} \\ &= \lambda^2 - (t_{11} + kt_{12})\lambda \end{aligned} \tag{1}$$

$$\det(U - \lambda I) = \lambda^2 \tag{2}$$

なんらかの対称性により，T の方では，λ のゼロ乗の係数を 0 に，U では，λ の一乗とゼロ乗の係数を 0 になったと考えられるのではないでしょうか？

次に同様に三次の行列（ $\dim S = 3$ ）を考えてみます．

$$
\begin{aligned}
\det(S-\lambda I) &= \det\begin{pmatrix} s_{11}-\lambda & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22}-\lambda & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33}-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (s_{11}-\lambda)(s_{22}-\lambda)(s_{33}-\lambda) + s_{21}s_{32}s_{13} + s_{12}s_{23}s_{31} \\
&- s_{12}s_{21}(s_{33}-\lambda) - s_{23}s_{32}(s_{11}-\lambda) - s_{13}s_{31}(s_{22}-\lambda) \\
&= -\lambda^3 + (s_{11}+s_{22}+s_{33})\lambda^2 - (s_{12}s_{21}+s_{23}s_{32}+s_{31}s_{13}-s_{11}s_{22}-s_{22}s_{33}-s_{33}s_{11})\lambda \\
&+ (s_{11}s_{22}s_{33}+s_{21}s_{32}s_{13}+s_{12}s_{23}s_{31}-s_{12}s_{21}s_{33}-s_{23}s_{32}s_{11}-s_{31}s_{13}s_{22}) \\
&= -\lambda^3 + tr\ S\ \lambda^2 - med\ S\ \lambda + \det S
\end{aligned}
\tag{3}
$$

式 (3) で，$med\ S = s_{12}s_{21}+s_{23}s_{32}+s_{31}s_{13}-s_{11}s_{22}-s_{22}s_{33}-s_{33}s_{11}$ と定義しました．（ med は，「中間」 $medium$ から名づけました．）

ここで，$rank\ S = 1$ の場合の一例を考えてみましょう．例えば，

$$
S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ k_1s_{11} & k_1s_{12} & k_1s_{13} \\ k_2s_{11} & k_2s_{12} & k_2s_{13} \end{pmatrix}
$$

ここで，k_1 と k_2 は，ある定数です．この時，

三次の係数： $-1 \neq 0,$

二次の係数： $trS = s_{11} + k_1s_{22} + k_2s_{33} \neq 0$

一次の係数： $medS = k_1s_{11}s_{12} + k_1k_2s_{12}s_{13} + k_2s_{11}s_{13} - k_1s_{11}s_{12} - k_1k_2s_{12}s_{13} - k_2s_{11}s_{13} = 0$

０次の係数： $\det S = 0$

またまた，なんらかの対称性により，一次とゼロ次の係数はゼロになりました．

次は，$rank\ S = 0$ の時を考えます．

$$
S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

この時，三次の係数以外は，すべてゼロになります．

まとめると，$\dim S = 2$ の時，$rank\ S = 2$ なら係数がゼロにならない，$rank\ S = 1$ の時，ゼロ次の係数がゼロ，$rank\ S = 0$ なら，一次の係数までゼロ．$\dim S = 3$ の時，$rank\ S = 1$ の時，1 次までゼロ，$rank\ S = 0$ の時，2 次までゼロ．ここから予想できるのは，次のような法則です．

$$
x = \dim S - rank\ S - 1 = n - r - 1
$$

と置くと，x 次の項まで，ゼロになるのでしょう．

実際それは正しく，なりたちます．詳しくは，次の証明を見てください．

定理

theorem

n 次の正方行列 A **で，**$rankA = r(< n)$ **のとき，特性多項式** $\det(A - \lambda I)$ **は，**$\lambda^i(i = 0, 1, 2, \cdots, n - r - 1)$ **の係数が** 0 **となる．**

（証明）

右基本変形 P，左基本変形 Q によって（この時，P, Q は n 次正則行列），任意の n 次正方行列 A は，次の標準形 B （n次正方行列）に変形することができる．

$$\begin{aligned} B &= QAP \\ &= \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ただし，I_r は r 次の単位行列とする．

ここで，$A - \lambda$ の特性多項式 Φ を考え，行列式を取る記号を det でなく，| | で表すと，

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= |Q^{-1}||Q(A - \lambda)P||P^{-1}| \\ &= |Q^{-1}||P^{-1}||QAP - \lambda QIP| \\ &= |Q^{-1}||P^{-1}||B - \lambda QP| \end{aligned}$$

ここで，$QP = S^{-1}$ と置くと，S^{-1} は正則行列なので，逆行列 S を持ちますので，

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= |Q^{-1}||P^{-1}||B - \lambda S^{-1}| \\ &= |Q^{-1}||P^{-1}||S^{-1}||SB - \lambda I| \\ &= |Q^{-1}||P^{-1}||QP| \left(\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda I_r & 0 \\ 0 & \lambda I_{n-r} \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} S_{11} - \lambda I_r & 0 \\ S_{21} & -\lambda I_{n-r} \end{pmatrix} \\ &= |S_{11} - \lambda I_r||(-1)^{n-r} \lambda I_{n-r}| \\ &= (-1)^{n-r}(r - th\ order\ polynomial\ of\ \lambda)|\lambda I_{n-r}| \\ &= (-1)^{n-r}(r - th\ order\ polynomial\ of\ \lambda)\lambda^{n-r} \end{aligned}$$

よって，n 次多項式である，A の特性多項式は，λ の 0 次から，$n - r - 1$ 次の項[*1] までの係数は，ゼロとなります．

長年の疑問が晴れてすっきりしました（安堵）．

[*1] ：ここで Q, P は正則なので，S は正則．しかし，S_{11} も正則で $rank\ S_{11} = r$ となるとは限らず，正確には，「少なくとも 0 次から $n - r - 1$ 次までは，係数がゼロ．」「しかし，n-r 次以上の係数もゼロかも知れない」となります．