

よくある間違い

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-10-11

公式集を見ると、ベクトル演算子 ∇ に関係した公式がたくさん載っていますが、全部を覚えるのは大変です。それらを自分で導かなければならなくなったとき、ありがちな間違いがあります。例えば、次の公式を導きたいとします。(右辺が分からないとします。)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \Delta \mathbf{V} \quad (1)$$

これを導くのに何か使える公式なかったかなあ・・・と教科書をパラパラめくって、次の公式を見つけたとしましょう。

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (2)$$

『やや、この左辺の形は使えそうぞ！じゃあこの公式で、 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ を ∇ と置いて、 $\mathbf{C}$ を $\mathbf{V}$ と置けばいいか！！』と喜び勇んで代入してみると・・・

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = (\nabla \cdot \mathbf{V})\nabla - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{V} \quad (3)$$

何だか式 (1) とは違った式が出てきてしまいました。 ∇ だって一種のベクトルなのに、何がいけなかったんでしょうか？式 (1)(2) は正しい公式で、式 (3) は間違いです。ここまで読んで、なぜ式 (3) が間違いなのかがよく分からない人は、先を読む前にじっくり理由を考えてみてください。

なぜ ∇ をベクトルの公式に代入しては駄目か

なぜ、 ∇ をそのままベクトルの公式に代入してはいけないかを考えてみましょう。確かに $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ はベクトルですが、『右から掛かってきたものを微分する』という特別な作用を持っています。

つまり、普通のベクトルならば $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ と $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ は同じですが、 $\mathbf{A} \cdot \nabla = A_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$ は、右から何かが掛かってくればたちまち微分してしまう微分演算子であり、一方、 $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$ は微分演算子ではなく、 $\mathbf{A}$ の発散 $\text{div} \mathbf{A}$ になっています。

つまり、内積をとるにせよ外積を取るにせよ、 ∇ は右から作用させる場合と左から作用させる場合では意味が違います。式 (2) のような、定ベクトルだけの公式は、たいていの場合 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ のような関係を用いて式を整理してしまっており、途中変形での積の順番が無視されてしまっている場合が多く、そのままでは ∇ を代入できません。

Important

ベクトルの公式に，そのまま ∇ を代入するのはやめましょう．

ベクトル演算子を含んだ公式を導くには，多少面倒ですが，[テンソル記号を使ってベクトル公式を導く](#)が確実です．