行列 A と逆行列 A^{-1} の積を入れ替えるとどうなるか？

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2012-07-24

今回の話は短いです．気楽にお読みください．

逆行列は左から掛けても右から掛けても同じ？

n次の正則な（つまり，逆行列を持つ）行列 A とその逆行列 A^{-1} の積は定義から，

$$A^{-1}A = I \tag{1}$$

です．I はn次の単位行列です．ここで，私が気になったのは，

$$AA^{-1} = ? \tag{2}$$

の値はどうなるかです．ここで，左からの逆行列を L 右からの逆行列を R とします[*1]．

つまり，

$$LA = AR = I$$

です．すると，

$$L = LI = L(AR) = LAR = (LA)R = IR = R$$

[*1] ここで注意しておくと A が正則な時，列基本変形 (右から掛ける変形) のみ，もしくは，行基本変形 (左から掛ける変形) のみで単位行列に変形できる（詳しくは参考文献の第 2 章 [4,4] 参照.）ので，L が存在するなら A は正則となり R も存在するし，R が存在するならやはり A が正則となり L も存在します．と，いいたいところですが，この引用には一つ難点があります．それは，[4,4] の証明の中で，基本変形行列とその逆行列の可換性が仮定されていることです．基本変形行列には，逆行列が存在することは仮定しなければなりません．もっといい証明法をご存知の方は是非クロメルまでメールを送ってください (^^;.

となり，結局，$L=R$ が結論されます．よって，これを A^{-1} と呼べるわけです．

直交行列での実例

例えば，$A^{-1}A=I$ となるように作られた，

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \tag{3}$$

という直交行列に対し，

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6} & \frac{1}{3}-\frac{2}{6} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3}-\frac{2}{6} & \frac{1}{3}+\frac{4}{6} & \frac{1}{3}-\frac{2}{6} \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6} & \frac{1}{3}-\frac{2}{6} & \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I \end{aligned} \tag{4}$$

と確かに $AA^{-1}=I$ が成立しています．これは，私は理屈では分かるのですが，とても不思議だと思っています．

それでは，今日はこの辺で．