オイラーの公式

崎間@物理のかぎプロジェクト

2004-05-10

さりげなく多用されているオイラーの公式は，複素数と実数の橋渡しとしてかなり重要です．オイラーの公式はつぎの形をしています．

$$e^{iax} = \cos(ax) + i\sin(ax) \tag{1}$$

ここで，i は虚数単位，a は定数，x は変数です．この公式は知らないととても困る上に恥ずかしいので，憶えておかなければなりません．

導いてみる

e^{iax} をべき級数展開するとつぎのようになります．

$$\begin{aligned} e^{iax} &= 1 + \frac{i(ax)}{1!} - \frac{(ax)^2}{2!} - \frac{i(ax)^3}{3!} + \frac{(ax)^4}{4!} + \frac{i(ax)^5}{5!} - \frac{(ax)^6}{6!} - \frac{i(ax)^7}{7!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{(ax)^2}{2!} + \frac{(ax)^4}{4!} - \frac{(ax)^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(\frac{(ax)}{1!} - \frac{(ax)^3}{3!} + \frac{(ax)^5}{5!} - \frac{(ax)^7}{7!} + \cdots\right) \end{aligned} \tag{2}$$

とりあえず e^{iax} はこういうふうに展開できるのだと思っておいてください．虚数単位 i が入っているので，i で括っています．i でくくった方が虚数部分，もう一方が実数部分です．

式 (2) と 式 (1) のオイラーの公式を比べて見ると，実数部分が $\cos(ax)$ で，虚数部分が $\sin(ax)$ なんでしょ，という気持ちになってきます．その通りで $\cos(ax)\,,\sin(ax)$ のべき級数はそれぞれつぎのようになります．

$$\cos(ax) = 1 - \frac{ax^2}{2!} + \frac{ax^4}{4!} - \frac{ax^6}{6!} + \ldots \tag{3}$$

$$\sin(ax) = \frac{ax}{1!} - \frac{ax^3}{3!} + \frac{ax^5}{5!} - \frac{ax^7}{7!} + \ldots \tag{4}$$

式 (3) と 式 (4) を 式 (2) に代入すると，オイラーの公式

$$e^{iax} = \cos(ax) + i\sin(ax)$$

が得られます．なんだかだまされたような感じですが，とりあえずオイラーの公式は導けました．

使いみち

「 e の肩に虚数単位 i が乗っていたら，sin と cos で表現できる」ということを肝に命じておきましょう．i に負号がついて $-i$ になったときは，sin , cos で表したときの i の符号が変わるだけです．

$$e^{iax} = \cos(ax) + i\sin(ax)$$
$$e^{-iax} = \cos(ax) - i\sin(ax)$$

また，上の 2 つの式を足し合わせると普通の sin , cos を e を使って表すことができます．

$e^{iax} + e^{-iax} = 2\cos(ax)$ より $\cos(ax) = \frac{e^{iax}+e^{-iax}}{2}$

$e^{iax} - e^{-iax} = 2i\sin(ax)$ より $\sin(ax) = \frac{e^{iax}-e^{-iax}}{2i}$

この関係も活躍するので憶えておくといいですね．