

テンソル記号を使ってベクトルの公式を導く

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-10-11

微分演算子の演算 ($grad, div, rot, \Delta$) を , テンソル記号を用いて表わすと次のようになります . 添字は $i = 1, 2, 3$ 等とし , 同じ添字が二回出てきた場合 (二乗を含む) は , 縮約によってその添字の総和を取るものとします .

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i \quad (1)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k \quad (2)$$

$$(\text{grad} f)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (3)$$

$$\text{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \quad (4)$$

$$(\text{rot} \mathbf{A})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \quad (5)$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} \quad (6)$$

$$(\Delta \mathbf{A})_i = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (7)$$

式 (1) – (7) は計算の基本になりますから , 自分でスラスラ書けないと困ります . 各式の左辺の意味がわかっていれば , テンソル記号表記の右辺を導くのは簡単だと思います . また , クロネッカーのデルタやレヴィ・チヴィタ記号の公式も必要になりますので , ここに紹介しておきます .

$$\delta_{ii} = 3 \quad (8)$$

$$\delta_{ij} \varepsilon_{ijk} = 0 \quad (9)$$

$$\varepsilon_{imn} \varepsilon_{jmn} = 2\delta_{ij} \quad (10)$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6 \quad (11)$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \quad (12)$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}) - \delta_{im}(\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kl}) + \delta_{in}(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) \quad (13)$$

例題

例題として、よくある間違いで使った次の公式を導いてみましょう。

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \Delta \mathbf{V}$$

まず左辺をテンソル記号で表記します。ベクトル $\nabla \times \mathbf{V}$ の第 k 成分をテンソルでまず $(\nabla \times \mathbf{V})_k = \varepsilon_{klm} \frac{\partial V_m}{\partial x_l}$ と書くところから始めましょう。添字は巡回的に k, l, m の順だとします。頑張って、もう一度 $\nabla \times$ を作用させ、 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V})$ の第 i 成分を表わします。添字は巡回的に i, j, k の順だとします。

$$(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}))_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varepsilon_{klm} \frac{\partial V_m}{\partial x_l} \right)$$

すでに頭がこんがらがっている人がいるかも知れませんが、式 (5) を使っただけです。添字が混ざらないようにすることだけに注意して下さい。以下、一行ごとにコメントと式変形を交互に書いていきます。まず ε_{klm} を外に出します。

$$= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \frac{\partial^2 V_m}{\partial x_j \partial x_l}$$

式 (12) が使えるように、 ε_{klm} を ε_{lmk} にします。 $(klm) \rightarrow (lmk)$ は偶置換なので符号は変わりません。

$$= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} \frac{\partial^2 V_m}{\partial x_j \partial x_l}$$

式 (12) を使います。

$$\begin{aligned} &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) \frac{\partial^2 V_m}{\partial x_j \partial x_l} \\ &= \delta_{il}\delta_{jm} \frac{\partial^2 V_m}{\partial x_j \partial x_l} - \delta_{im}\delta_{jl} \frac{\partial^2 V_m}{\partial x_j \partial x_l} \end{aligned}$$

クロネッカーのデルタの作用を考えますが、出来る限り lm を消して ijk に統一する方向で整理します。

$$= \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2}$$

*1 この記事の内容と基本的に同じもので、より [本格的に解説した資料](#) を、愛媛大学元教授・矢野忠先生から御寄稿頂きましたので、ぜひ併せてご覧下さい。矢野先生、どうもありがとうございました。

式 (1)(3) より第一項目は $(\nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}))_i$, 式 (7) より第二項は $-(\Delta \mathbf{V})_i$ と書き直すことができます . 公式が証明できました .

$$= (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \Delta \mathbf{V})_i$$

練習問題

練習問題として , 次の公式をテンソル記号を使って導いてください . テンソル記号をすらすら使うには , ある程度の馴れが必要ですが , 馴れてくれば , 半ば自動的に公式を導けます .

1. $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B})$
2. $\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{A}|^2 - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A}$
3. $\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$