一様に帯電した無限平面板の作り出す電場

CO @物理のかぎプロジェクト

査読中

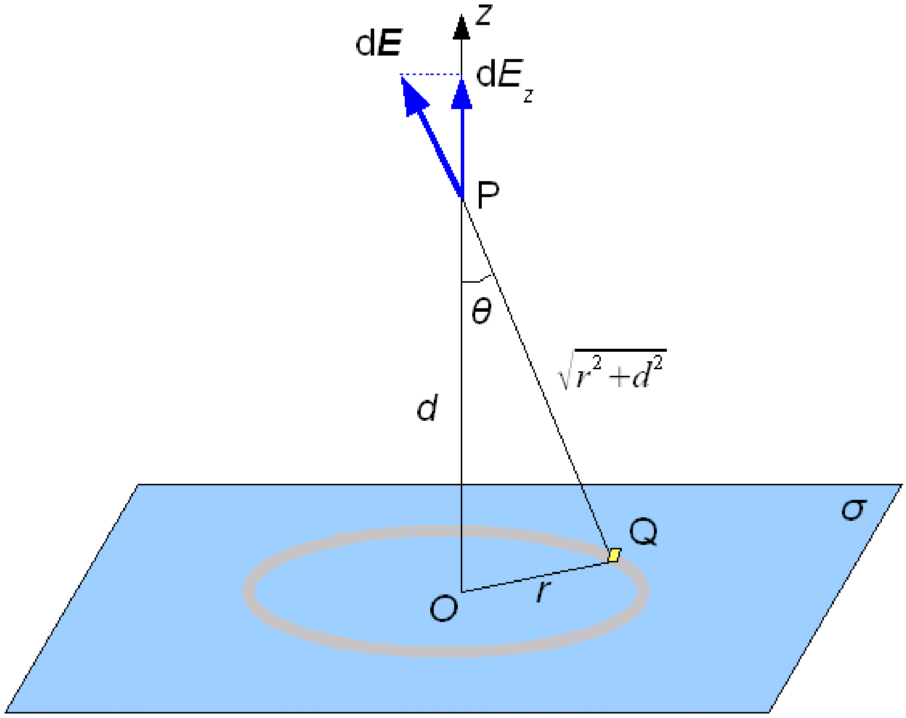
この記事では「一様に帯電した無限平面板」が作り出す電場についてクーロンの法則を用いて考えてみます．平行平面板コンデンサを考えるときなどに応用できます．

状況設定

まずは状況を設定しましょう．

無限に広がった平面板を考えます．この平面板は一様な平面電荷密度 σ で帯電しています．これは言い換えると単位面積あたり σ の電荷があるということです．

求めたいのは，平面板から距離 d だけ離れた点 P に，この一様に帯電した平面板が作り出す電場です．



問題を考えるために座標系を設定しましょう．空間の対称性から，平面板に垂直な方向に z 軸をとりま

す．そして平面板上の適当な点を原点 O としてとり，O を中心に平面極座標 (r, ϕ) をとります．

物理の問題

では物理の問題を考えていきましょう．

電場は 重ね合わせの原理 が効きます．なので，まず平面板上の原点から r だけ離れた点 Q のまわりの微小面積 $\mathrm{d}A$ が P 点に作り出す電場を求め，それを平面板上の全面積にわたって積分することにしましょう．

点 Q の周りの微小面積 $\mathrm{d}A$ は

$$\mathrm{d}A = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$$

と表すことができます．この微小面積には $\sigma\mathrm{d}A$ だけの電荷が含まれています．この電荷が点 P に作り出す電場の大きさ $\mathrm{d}E$ はクーロンの法則から

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma\mathrm{d}A}{\sqrt{r^2+d^2}} \tag{1}$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi}{r^2+d^2} \tag{2}$$

となります．

空間の対称性から，z 方向以外の成分は全面積にわたって積分すると打ち消し合って消えます．したがって私たちは z 方向の成分だけを計算すれば良いことになります．電場の z 方向成分 $\mathrm{d}E_z$ は $\angle\mathrm{OPQ} \equiv \theta$ とすると

$$\mathrm{d}E_z = \mathrm{d}E\cos\theta \tag{3}$$

と書けます．ここで $\cos\theta = d/\sqrt{r^2+d^2}$ です．

では平面板全体が P 点に作り出す電場を求めるために式 (3) を全面積にわたって積分しましょう．ここからは単なる計算です．

$$E_z = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\infty}r\mathrm{d}r\ \frac{1}{r^2+d^2}\cos\theta \tag{4}$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\infty}r\mathrm{d}r\ \frac{1}{r^2+d^2}\cdot\frac{d}{\sqrt{r^2+d^2}} \tag{5}$$

$$= \frac{\sigma d}{2\epsilon_0}\left[\frac{-1}{\sqrt{r^2+d^2}}\right]_0^{\infty} \tag{6}$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \tag{7}$$

となります．

実はこの結果は ガウスの法則 を用いれば簡単に求めることができます．ただしガウスの法則がいつも

使えるとは限りませんので，このようなどろくさい手法も身につけておくと良いでしょう．

結果

以上より，一様に帯電した無限平面板が点 P に作り出す電場は $\boldsymbol{E} = (0, 0, \frac{\sigma}{2\epsilon_0})$ です．電場は平面板に垂直な向きで，その **大きさは距離 d にはよらない** ことがわかります．

結果はシンプルですが非常に応用範囲が広いので，覚えておいて損はありません！