2 次方程式の解の公式

崎間@物理のかぎプロジェクト

査読中

2 次方程式には「解の公式」なるものが存在します．中学・高校では頻繁に使うのですが，個人的に最近はあまり使わなくなっていました．公式の存在すら忘れてしまい「ん，これはどうやって解くんだ？」，「解の公式？は？」なんてことにならないためにも，そして「公式」に頼りきらないためにも，2 次方程式の解の公式を導出をしてみましょー．さらに学びたい人には， 平方完成の図形的イメージ という姉妹記事も用意しています．

解の公式

まずは公式そのものの確認です．2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1}$$

で与えられるという公式，これが「2 次方程式の解の公式」です．ほとんどの人が，中学生のとき数学の授業で暗記させられたと思います．みなさんは，まだ覚えていますか？（僕はついこないだまで忘れてました.）

導出

それでは，解の公式を導いてみます．単純に，2 次方程式を平方完成して解けば良いです．つぎの 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

を，実際に平方完成して解いて行きましょう（平方完成の手順を忘れてしまった人は，その復習にもなりますよ）．最初に，一番次数の大きい x^2 の係数で x の項を括ります．いまの場合は a で括ることになります．

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = 0 \tag{2}$$

そして，括ったカッコを 2 乗（平方）の形にします．ここが平方完成です．

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c=0 \tag{3}$$

このとき，マイナスの項が出てくる理由はいいですよね（よく分からなければ，実際に式 (3) を計算して，式 (2) に戻ることを確かめてみてください）．

式 (3) の左辺第 1 項だけを左辺に残し，それ以外は右辺に移項します．

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=a\left(\frac{b}{2a}\right)^2-c$$

上式の両辺を a で割って（ $a\neq 0$ とします），右辺を通分すると

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2&=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}\\&=\frac{b^2}{2^2a^2}-\frac{c}{a}\\&=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\end{aligned}$$

となります．ここまでくれば，後は

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \tag{4}$$

を変形して $x=$ の形にしてやれば解の公式のできあがりです．とりあえず，左辺の 2 乗を外したいですね．

たとえば「 $x^2=u$ 」という式があって， x^2 の二乗を外したい場合は，右辺をルートにすれば良いのでした．しかし $x=\sqrt{u}$ では間違いです．二乗して u になる数は $+\sqrt{u}$ と $-\sqrt{u}$ の二つあることに注意してください．したがってこの例では $x=\pm\sqrt{u}$ となります．

これを踏まえて式 (4) を変形しますと

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

となります．そして左辺第 2 項を移項して

$$x=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}-\frac{b}{2a}$$

通分すると

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

のできあがりです．これで，解の公式 (1) の導出が完了しました．導出の流れさえ理解しておけば，解の公式を忘れてしまっても，$ax^2+bx+c=0$ からスタートしていつでも導くことができます．解の公式を導く方法は上の通りでしたが，「平方完成」とはどういう意味があったのでしょう．知りたい方は 平方完成の図形的イメージ に進んでみてください．