体 (たい)

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-05-27

ある集合があって，その集合が，四則演算 (加法，減法，乗法，除法) に関して閉じているとき，この集合を **体** と呼びます．

体の公理

以下の条件を満たす集合を体と呼びます．

1. 加法について可換群になっています．(加法が閉じており，単位元 0，逆元 $-a$ があります)．加法の単位元を特に **零元** と呼びます．
2. 乗法について可換群になっています．(乗法が閉じておりる，単位元 e，逆元 a^{-1} があります．ただし，加法の単位元 0 の逆元だけは定義できません．)
3. 加法と乗法について分配法則がなりたちます．$(a+b)c = ac + bc$, $a(b+c) = ac + ac$

いままで群について学んで来ましたが，群には演算が一種類だけ与えられているのでした (そしてそれは加法でも乗法でも良かったのでした)．体には，加法と乗法という，二種類の演算が入っています．加法の逆演算は減法，乗法の逆演算は除法ですから，要するに **体とは四則演算が可能な集合のことである** と考えられます．

例

下の例を考えながら，『四則演算の定義された集合』というのがどういうものか，堪能してみてください．今まで普通に知っていた集合が多いと思いませんか？

[*1] 体は加法に関しては群，乗法に関しても零元を除いて群になっていますので，いままで群論で勉強した概念が，だいたいそのまま体にも当てはまります．また体は，次に勉強する 環 よりも強い構造ですので，環に当てはまる議論が，ほとんどそのまま体に適用できます．

[*2] いままで，群論に出てきた情報は一般には非可換でしたが，体の乗法は可換ですので，計算が随分と簡単になることを感じられると思います．体の公理に準じつつも，乗法は非可換の体を「斜体」と呼びます．こんな変な体は，今は覚えなくても大丈夫です．

例1

有理数の全体は体です．有理数＋有理数，有理数-有理数，有理数×有理数，有理数÷有理数 (ただし零では割らない) は，いずれも有理数になるからです．これを **有理数体** と呼び，Q で表わします．

例2

実数の全体も体になります．実数同士は足したり，引いたり，掛けたり，割ったりでき，結果も実数になるからです．同じく **実数体** と呼び，R で表わします．

例3

複素数の全体も体になります．自分で確認してみましょう．**複素数体** と呼び，C で表わします．

例4

整数の全体は体ではありません．整数÷整数は，かならずしも整数にはならないからです．自然数の全体も体ではありません．自然数-自然数や，自然数÷自然数が，かならずしも自然数にはならないからです．

例5

四元数の全体は体になります．**四元数体** と呼ばれます．四元数の四則演算については，四元数 を参照ください．

例6

整数の加法群 Z から，素数 p の剰余群 $Z/[p]$ を作ります ($[p]$ は p の倍数の集合の意味です．なぜ p を素数とするのかは後ほど 整域・整数の剰余類の環_ で説明します．)

$$Z/[p] = \{[p], 1+[p], 2+[p], ..., (p-1)+[p]\}$$

この元の中で偶数からなる元を $\bar{0}$, 奇数からなる元を $\bar{1}$ と表わすと，元の間に次のような加法と乗法を定義できます．

$$\bar{0}+\bar{0}=\bar{1}+\bar{1}=\bar{0}$$

$$\bar{1}+\bar{0}=\bar{0}+\bar{1}=\bar{1}$$

$$\overline{00}=\overline{10}=\overline{01}=\bar{0}$$

$$\overline{11}=\bar{1}$$

零元は $\bar{0}$, 乗法の単位元は $\bar{1}$ です．このような加法と乗法に対して，$Z/[p]$ は体になります．