ベクトル解析奮闘記（１）

やかん@物理のかぎプロジェクト

YYYY-MM-DD

はじめに

講義などで初めてベクトル解析を習った時, “ 難しい ”, “ わけわからん ” と思った経験がありませんか？実は私もその一人です．いまだに詳しくはわかりませんが，これまで私が悩んだ過程をここにご紹介して，もしご参考になればと思います.

初講義前日

ベクトル解析って，ベクトルを使って問題解いたりするのでしょうか？ベクトルなら高校の数学で習ったし，要するに大きさと，方向（向き）を持つ概念ですよね？矢印作図して足し算したり，引き算したり，大きさを実数倍したり，特に始点を原点.. raw:: latex

> begin{align*}　(0,0) end{align*}

Block quote ends without a blank line; unexpected unindent.

にすれば終点の座標 (x, y) でベクトルを表せちゃいます．作図しなくても，そういう風に成分表示すれば足し算，引き算も簡単です．内積だってわかります．成分で書くと $(a, b)\cdot(c, d) = ac + bd$ とすればいいのです．簡単，なはずです．たいした事ないですよ，きっと．実は明日ベクトル解析の初講義なんですが，予習なんてしないで寝ちゃおっと・・・.

翌日初講義終了．ところが！

わー，なんなんだこれは！わからん，全くわからん！だいたい三角関数の $\sin, \cos$ じゃあるまいし，なんでベクトルやるのに３，４文字英単語（ grad （グラジエント）， div （ダイバージェンス）， rot （ローテーション)）や，おまけに偏微分記号まで出てくるんでしょう！もちろん $\sin, \cos$ は私でもわかります，直角三角形の辺の比ですよね？（絵を書いてみればすぐわかります.）偏微

分だって，他の変数（例えば x で微分する場合，それ以外の y, z など）を定数と見て，微分する事でしょ？それも知ってるんだがなあ．いずれにせよこれは家に帰ってよく復習しないと．電磁気学はこれ使うって言うし・・・．

自宅で復習（grad の巻）

ここであきらめたり，あせってもしょうがないのでまずゆっくり順番に考えてみました．“ grad ” はえーっと “ gradient （傾き）” の略ですか・・・．たしか先生が黒板に書いた式は

$$\mathrm{grad} f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$$

だったなー．う〜ん， grad ももちろん， ∂ がいかにも難しそう・・・．でも冷静に見ると，これは値が三つ組みになってるから，スカラー（ベクトルのように方向を持たないただの数値）関数 f から３次元のベクトルを一つ作ったようですね（どんなベクトルかはまだわかりませんが）．とりあえず，わかりやすくするために z を省いて２次元で考えると

$$\mathrm{grad} f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$$

あれっ，こうやってみると， x の変化に対する f の変化率と， y の変化に対する f の変化率を x, y 成分に持つベクトルのようですね．例えば f を具体的に考えると

$$f = 3x + 4y$$

Explicit markup ends without a blank line; unexpected unindent.

なら

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3$$

Explicit markup ends without a blank line; unexpected unindent.

（ $4y$ は定数扱いで 0 になる）.. raw:: latex

> begin{align*} frac{partial f}{partial y}=4 end{align*}

Block quote ends without a blank line; unexpected unindent.

（ $3x$ は定数扱いで 0 になる）だから

$$\mathrm{grad} f = (3, 4)$$

Explicit markup ends without a blank line; unexpected unindent.

となるわけですか・・・．一体このベクトルは何者でしょうか？今の場合，変数 (x, y) の変化に対する f の変化率を表記する時に， x 方向に対する変化率は３， y 方向に対する変化率は４，ということなのですが，どちらか 0 なら，片方だけ（数値１個）で表されるのでしょうけど，実際はそうとは限らないし， x 方向と y 方向じゃ違う方向の大きさですから， $3 + 4 = 7$ と足し算するわけにもいきません．もし $(1, 100)$ なら，ほとんど y 方向と考えていいけど， x 方向も完全に無視はできないし，それぞれの方向の大きさに応じた合成方向・・・というわけですか．なるほど，それで x 方向と y 方向の変化率をそれぞれ x 方向と y 方向の成分としたベクトル.. raw:: latex begin{align*} {rm grad} f=(frac{partial f}{partial x}, frac{partial f}{partial y}) end{align*}

を考えれば，まとめて表記できるわけですね． x 方向の変化率を.. raw:: latex

begin{align*} (frac{partial f}{partial x},0) end{align*}

Block quote ends without a blank line; unexpected unindent.

，y 方向の変化率を.. raw:: latex

begin{align*} (0,frac{partial f}{partial y}) end{align*}

Block quote ends without a blank line; unexpected unindent.

と，それぞれ自体ベクトルと考えると，

$$(\frac{\partial f}{\partial x},0)+(0,\frac{\partial f}{\partial y})=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})=\mathrm{grad}f$$

Explicit markup ends without a blank line; unexpected unindent.

ですから， $\mathrm{grad}f$ は x の変化率と y の変化率を方向も含めて合成した，一番変化率の高い（坂で言えば勾配のきつい）方向を向いてるベクトルなんですね．だから grad （勾配）というのか・・・．ふー，やっとわかった気がします．（ z を増やして 3 次元で考えても同じ事ですね）

勾配がきつい方向ということは，向きを逆にすれば，ボールが転がり落ちてくる方向になります（下図）．