# スカラー場と勾配

Joh @物理のかぎプロジェクト

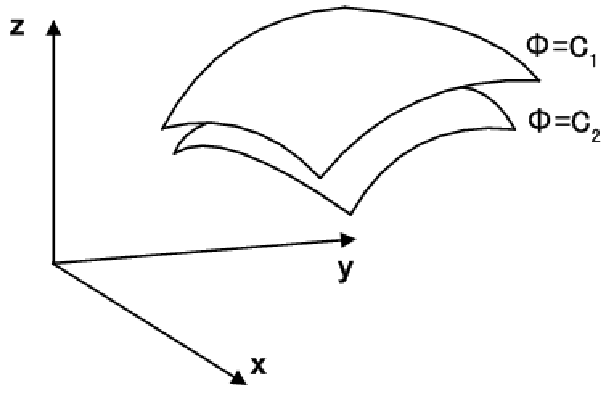
2006-10-11

スカラー場 $\phi(\boldsymbol{r})$ を考えます.

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \phi(x_1, x_2, x_3) \tag{1}$$

スカラー場とは，空間の各点 $(x_1, x_2, x_3)$ でスカラーが一つ決まるような関数を言います．ある点では $\phi = \alpha$，別の点では $\phi = \beta$ という具合です．しかし $\phi(\boldsymbol{r})$ の取る値を全部調べてグラフにすると $(x_1, x_2, x_3, \phi(x_1, x_2, x_3))$ という四次元のグラフになってしまい，絵に描けないので，何だか何だかよく分かりません.

そこで，代わりにあるスカラー値，例えば $C_1$ を考え，$\phi(\boldsymbol{r}) = C_1$ を満たす $(x_1, x_2, x_3)$ を全てグラフに描いてみることにします．これは何らかの三次元曲面を表わす式となり，グラフも目で見て分かります．その代わり，全体の様子を知ろうと思えば，様々なスカラー値に対して，たくさん曲面を描かなければなりません.




これらの面を **スカラー場の等位面** と呼びます.（物理学の文脈では，スカラー場はしばしばポテンシャルと呼ばれ，このような面は **等ポテンシャル面** と呼ばれます.）上図は等位面の様子を示してみたものです．$\phi(\boldsymbol{r})$ が連続関数ならば，$C$ の値を少しずつずらしてやって，様々な等位面をタマネギの皮が重なるような感じに書けます．詳しい地図には等高線という線が引いてありますが，等位面とは，等高線の三次元版だと思えば良いでしょう．$C$ を一定間隔で変化させて様々な等位面を重ねて描く時，等位面の密度が濃い（隣の等位面との距離が近い）部分は $\phi$ の変化が激しく，逆に等位面の密度が薄い（隣の等位面との距離が遠い）部分は $\phi$ の変化が緩やかな部分だと考えることができます．これは，等高線の密度が濃い部

分は山の勾配がきつく，密度が薄い部分の勾配が緩いのと同じ理屈ですね．

等位面が交差することはありません．というのは，最初に『 $\phi$ に対し空間の各点 $(x_1, x_2, x_3)$ でスカラーが **一つ決まる** 』と仮定しているからです．

# スカラー場の勾配

私達は，スカラー場 $\phi(\boldsymbol{r})$ の値に応じて決まる曲面（等位面）を考え，等位面の粗密によってスカラー場の変化の具合を考えました．面の粗密に応じて変化の具合が分かるというのは，ちょうど地図の等高線と同じアイデアでした．そこで，次の興味が湧いてくるのは，実際に関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ の変化具合を計算してみることです．

もしも $\phi$ が一変数の関数，例えば $\phi(t)$ ならば，任意の点（例えば $t = t_0$ ）における勾配は，$\phi$ の微係数を計算して $\left.\frac{d\phi}{dt}\right|_{t=t_0}$ として調べられるでしょう．いま，私達が考えなければならないのは，$\phi$ が $\phi(\boldsymbol{r}) = \phi(x_1, x_2, x_3)$ という三変数の関数であることです．とりあえず，三種類の偏導関数を考えてみましょう．

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_3}$$

これら三種類の偏導関数の組は 共変ベクトルと反変ベクトル の記事の最後の例で示したように，ベクトルになります．

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right)$$

このベクトルを **勾配ベクトル** と呼び，次のように grad を用いて表わします．（英語で勾配のことを *gradient* と言います．）

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}\phi &= \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\boldsymbol{e_1} + \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\boldsymbol{e_2} + \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\boldsymbol{e_3} \end{aligned}$$

もしくは，微分演算子を組み合わせたベクトルを $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ と置き，次のように書いても同じことです．この記号 $\nabla$ を **ナブラ** もしくは **ハミルトンの演算子** と呼びます．（ナブラを，$\phi$ のようなスカラーに作用させる時 grad と書くのです．ベクトルに作用させるときは div と書きます．div はまた後で勉強します．一長一短あるのですが，今後，grad と書くより，記号 $\nabla$ を使う方が多いと思います．）

[*1] ただし，地図で『勾配が急だ』『勾配が緩い』などというのは，“高さの勾配” の話をしています．これは，『高さ』が位置の関数になっていると考えられます．一般に式 (1) のように書いた関数 $\phi$ は，高さに限らず，重力，電場，磁場など色々な場を表わす場合があります．電場や磁場など目に見えない世界になると急にイメージが湧かなくなる人がいますが，基本は上の図と，地図の等高線のイメージです．

[*2] 新田次郎氏の小説『孤高の人』に，主人公・加藤文太郎が，会社の先輩に『地図遊び』という遊びを教わるシーンがあります．地図の等高線をじっくりながめ，地形の起伏が目に浮かび，山が川がどこをどう流れているか，光が当たると影がどう伸びるかという立体的な様子を，山登りに行く前にイメージするという遊びなんですが，かなり高度な立体図形の把握能力が求められそうです．読者のみなさんも，等位面を使って『地図遊び』をしてみて下さい．電場や磁場をいきいきと想像できる人になりたいものです．

[*3] ナブラはベクトルですから，ベクトルの性質を持ち，ベクトルで成り立った定理を使うことができます．そういう意味で，ナ

ブラだって疑いなく一種のベクトルです．ただし，ナブラの演算で注意しなければならないのは，ナブラの右側から何かを掛けると，微分されてしまうという性質です．ナブラに左から何か掛けてもそれは単なる積です．こうした『微分演算子』という役割を持つため，ナブラを掛け算するときには注意が必要です．たとえば内積も可換ではなくなります．順々に $\nabla$ を使った計算を見ていくので馴れていくとは思いますが，このことを念頭に置いておいて下さい．よくある間違い を参考にしてください．