波の式 2

tomo @物理のかぎプロジェクト

2005-07-10

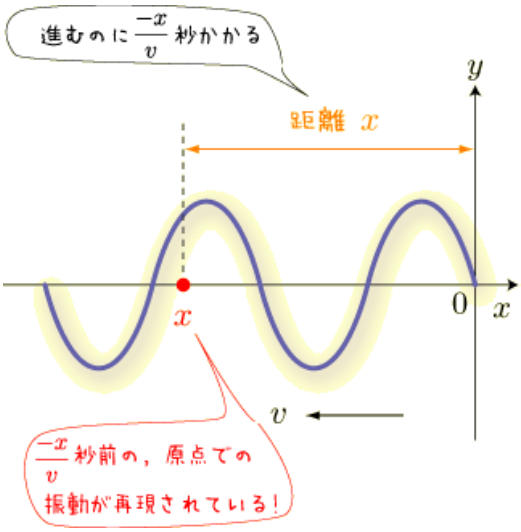
波の式 1 では，波源が原点にあって $y(0,t) = A\sin 2\pi\frac{t}{T}$ （ A は振幅，T は周期）という振動をしている場合について，$x > 0$ の領域でどのような振動になっているかを学びました．波の式 2 では，この場合の $x < 0$ の領域での振動や，波源の振動が $y(0,t) = A\sin 2\pi\frac{t}{T}$ でない場合の振動，そして，波源が原点以外の点にある場合の振動についてみていきます．以下では，波長を λ，波の伝わる速さを v とします．

x<0 の領域ではどのような振動になっているか

波源が原点にあって $y(0,t) = A\sin 2\pi\frac{t}{T}$ という振動をしている場合，$x > 0$ の領域では，

$$y(x,t) = A\sin\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

という振動をしていましたね．点 x においては，「波源の振動が $\frac{x}{v}$ 秒遅れて伝わる」ということから式を導いたのでした．では，$x < 0$ の領域にはどのような振動が伝わっているのでしょうか．



原点にある波源の振動が点 x の位置まで伝わるのにかかる時間は，$\frac{(-x)}{v}$ 秒となります．なぜ，マイナスがついているか，分かるでしょうか？今，x は負です．そのため，$\frac{x}{v}$ は負になってしまい，「時間が経過している」ということと矛盾してしまいます．それを避けるために，マイナスをつけて，値がプラスにな

るようにしているのです．

$\frac{(-x)}{v}$ 秒前の波源の振動が伝わってきているので，$x<0$ の領域では，

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y\left(0, t-\frac{(-x)}{v}\right) \\ &= A\sin 2\pi \frac{\left(t-\frac{(-x)}{v}\right)}{T} \\ &= A\sin 2\pi \frac{\left(t+\frac{x}{v}\right)}{T} \end{aligned}$$

となります．少し書き換えてみますと，

$$\begin{aligned} y(x,t) &= A\sin \frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x}{v}\right) \\ &= A\sin 2\pi \left(\frac{t}{T}+\frac{x}{vT}\right) \\ &= A\sin 2\pi \left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

となります．

波源の振動がこれまでと違う場合はどうなるか

これまでは，波源の振動を

$$y(0,t) = A\sin 2\pi \frac{t}{T}$$

に限ってきました．これは，時刻 $t=0$ に媒質が点 $x=0$ を $y>0$ の方向に向かって通過する振動で，言ってみれば特殊な場合です．しかし，波源は必ずしもそういった振動であるとは限りません．一般に波源の振動は，

$$y(0,t) = A\sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\alpha\right)$$

と表すことができます．この振動では，$y(0,0)=A\sin\alpha$ となりますね（ α を「初期位相」と呼びます）．さて，このとき点 x ではどのような振動になるでしょうか．波源の振動が，$x>0$ の領域では $\frac{x}{v}$ 秒だけ遅れて，$x<0$ の領域では $\frac{(-x)}{v}$ だけ遅れて伝わることは，もう分かりますね．したがって，$x<0$ の領域では

$$y(x,t) = y\left(0, t-\frac{x}{v}\right) = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}+\alpha\right)$$

$x>0$ の領域では

$$y(x,t) = y\left(0, t-\frac{(-x)}{v}\right) = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}+\alpha\right)$$

となるわけです．

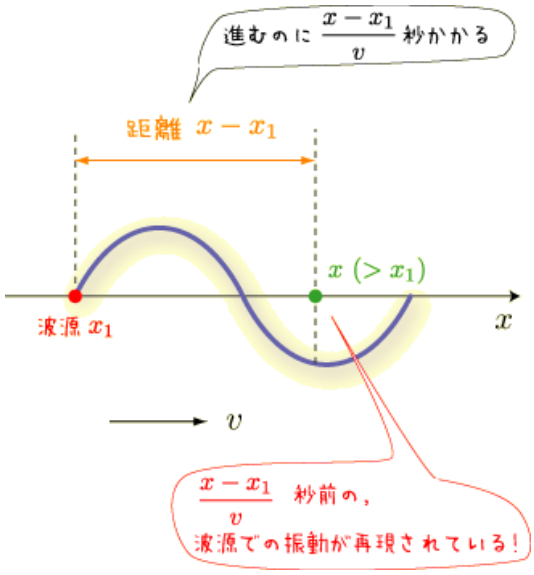
波源が原点以外の点にある場合はどうなるか

これまでは，波源が原点にある場合を扱ってきました．では，波源が原点以外の点にある場合は，どうなるのでしょうか．波源が点 x_1 にあって，

$$y(x_1, t) = A\sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \alpha\right)$$

という振動をしている場合を考えてみましょう．

$x > x_1$ の領域の点 x には，波源の振動が $\frac{x-x_1}{v}$ 秒遅れて伝わってきます．



したがって，

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y\left(x_1, t - \frac{x-x_1}{v}\right) \\ &= A\sin\left(2\pi\frac{t - \frac{x-x_1}{v}}{T} + \alpha\right) \\ &= A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x-x_1}{v}\right) + \alpha\right) \\ &= A\sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x-x_1}{\lambda}\right) + \alpha\right) \end{aligned}$$

と求まります．

問

波源が点 x_1 にあって，

$$y(x_1, t) = A\sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \alpha\right)$$

という振動をしている場合，$x < x_1$ の領域ではどのような振動になるか.

まとめ

波の式を求めるのに考えなければならないことは,

- 波源はどこにあるのか
- 波源はどのような振動をしているか
- 振動の様子を知りたい点には，波源の振動が何秒遅れて伝わってきているか

の 3 つです．・・・と聞いて,「ふむふむ」と思えた人はもう大丈夫です.