

位置演算子の固有関数の運動量表示

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2009-12-27

こんにちは、クロメルです。S1Sz0の状態に関する考察に続き、今度は位置演算子 $\hat{q}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ の固有状態の変換を書きます。

基本事項

これからしたいことは、位置演算子 $\hat{q}$ の固有関数 $|q'\rangle$ を運動量演算子 $\hat{p}$ の固有関数 $|p'\rangle$ で表す^{*1} ことです。

位置演算子 $\hat{q}$ の固有関数は、

$$\hat{q}|q'\rangle = q'|q'\rangle \quad (1)$$

を満たし、 q 表示をすると、

$$\langle q|q'\rangle = \delta(q - q') \quad (2)$$

となります。

また、運動量演算子 $\hat{p}$ の固有関数は、

$$\hat{p}|p'\rangle = p'|p'\rangle \quad (3)$$

を満たし、 q 表示をすると、

$$\langle q|p'\rangle = e^{ip'q/\hbar} \quad (4)$$

また、恒等演算子、

$$\hat{1} = \int |q\rangle\langle q|dq \quad (5)$$

を使います。

^{*1} : ディラックの書き方に習い、プライム ' は、特定の実数を表すことにします。A の演算子は、ハット $\hat{A}$ をつけて表します。

ここまで挙げた基本的な事項は、参考文献に挙げた「量子力学」ディラック著などを参照してください。

本題

さて、いよいよ展開してみましょう。

$$\begin{aligned}\langle p|q'\rangle &= \langle p|\hat{1}|q'\rangle \\ &= \int \langle p|q\rangle \langle q|q'\rangle dq \\ &= \int e^{-ipq/\hbar} \delta(q - q') \\ &= e^{-ipq'/\hbar}\end{aligned}\tag{6}$$

これは、位置 $q = q'$ に局在する粒子は、運動量 p が定まらないというハイゼンベルクの不確定性原理を表しています。実空間と運動量空間は、フーリエ変換で結ばれています。

今日はここまで。