ガウス関数のモーメントを簡単に計算する方法

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2012-10-28

この記事では，確率・統計で使われる，ガウス分布のモーメント計算を簡単にする為のテクニックを紹介します．

ちなみに，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{1}$$

は，既知であるとします．ご存知のない方は，CO さんの，ガウス積分の公式 をご覧ください．

モーメントとガウス分布

分布関数 $p(x)$ に対し，n 次（ n は整数）のモーメント $\langle x^n \rangle$ とは，

$$\langle x^n \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx} \tag{2}$$

で定義されます．ここで，式 (2) の分母は正規化を表しており，

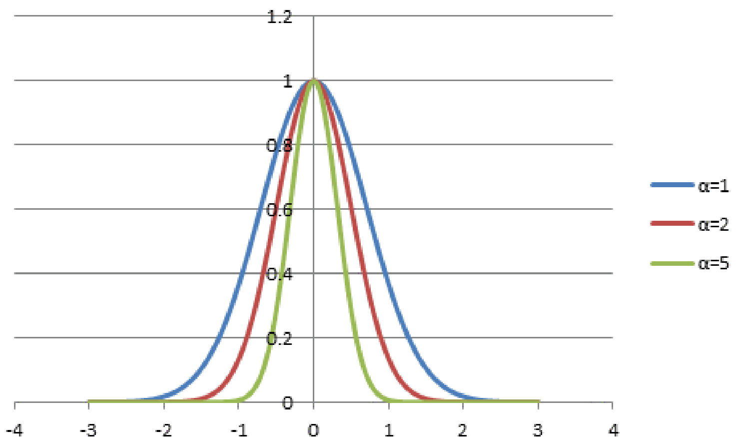
$$p'(x) = \frac{p(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx} \tag{3}$$

とすれば，分布関数 $p'(x)$ は総和が 1 に等しいので，変数 x での値を取る時の確率が $p'(x)$ となっています．

ところで，ガウス分布とは実数 $\alpha (> 0)$ として，

$$p_G(x) = \exp(-\alpha x^2) \tag{4}$$

という釣鐘（つりがね）型の分布関数をした分布です．この関数のことをガウス関数，または，ガウシアンと呼びます．グラフにすると



と，このようになります．パラメータの α は，大きいほど原点に局在する鋭い分布関数になります．

ガウス関数のモーメント

ここで，ガウス分布に関するモーメントを考えてみましょう．モーメントを表す括弧に $_G$ の添え字をつけて，ガウス分布であることを表示しておきます．

ちなみに，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{5}$$

は，既知であるとします．

すると，まず 0 次のモーメントは，

$$\begin{aligned}\langle x^0 \rangle_G &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^0 p_G(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} p_G(x) dx} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} p_G(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} p_G(x) dx} \\ &= \frac{\sqrt{\pi/\alpha}}{\sqrt{\pi/\alpha}} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{6}$$

となります．これは簡単でしたね．

次は，1 次のモーメントです．

$$\int_{-\infty}^{\infty} x p_G(x) dx \tag{7}$$

は，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} p_G(x) &= \frac{d}{dx} \exp(-\alpha x^2) \\ &= -2\alpha x \exp(-\alpha x^2)\end{aligned} \tag{8}$$

ですから，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x\exp(-\alpha x^2)dx &= \frac{1}{-2\alpha}\left[\exp(-\alpha x^2)\right]_{-\infty}^{\infty}\\ &= 0-0=0 \qquad (9)\end{aligned}$$

より，

$$\langle x\rangle_G = 0 \qquad (10)$$

です．一般にガウス関数の奇数次のモーメントは奇関数の積分範囲が原点対称な積分ですから，ゼロとなります．もし，どうしても計算で示したいときは，$x^2=u$ と置換積分を行うとよいでしょう．

$$\langle x^{2n+1}\rangle_G = 0 \qquad (for \quad n=0,1,2,3,\cdots) \qquad (11)$$

それでは，2 次のモーメントを求めます．それは部分積分を利用します．

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\exp(-\alpha x^2)dx &= \frac{1}{-2\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{d}{dx}\left(\exp(-\alpha x^2)\right)dx\\ &= \frac{-1}{2\alpha}\left[x\exp(-\alpha x^2)\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dx}(x)\exp(-\alpha x^2)dx\\ &= 0 + \frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\alpha x^2)dx\\ &= \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad (12)\end{aligned}$$

よって，2 次のモーメントは，

$$\begin{aligned}\langle x^2\rangle_G &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2\exp(-\alpha x^2)dx}{\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\alpha x^2)dx}\\ &= \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\Big/\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\\ &= \frac{1}{2\alpha} \qquad (13)\end{aligned}$$

非負の整数 n に対して，$\langle x^{2n}\rangle_G$ は部分積分を繰り返すことで，求めることができます．

そんな面倒をしなくても

と，ここまでモーメントの計算をしてきましたが，実は簡単に済ませる方法があるのです．それには，

$$x^{2n}\exp(-\alpha x^2) = \left(-\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^n \exp(-\alpha x^2) \qquad (14)$$

と書けることを利用します．x での積分と α での積分を入れ替えます．つまり，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}\exp(-\alpha x^2)dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^n\exp(-\alpha x^2)dx\\ &= \left(-\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^n\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\alpha x^2)dx\\ &= \left(-\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^n\left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) \qquad (15)\end{aligned}$$

よって,

$$
\begin{aligned}
\langle x^2 \rangle_G &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-\alpha x^2) dx \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx \\
&= \left\{ \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right\} \Big/ \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \\
&= \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \Big/ \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \\
&= \frac{1}{2\alpha}
\end{aligned} \tag{16}
$$

となり,

$$
\begin{aligned}
\langle x^4 \rangle_G &= \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp(-\alpha x^2) dx \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx \\
&= \frac{3}{2\alpha} \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \Big/ \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \\
&= \frac{3}{4\alpha^2}
\end{aligned} \tag{17}
$$

となり,一般に,

$$
\begin{aligned}
\langle x^{2n} \rangle_G &= \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} \exp(-\alpha x^2) dx \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx \\
&= \frac{(2n-1)!!}{2^n \alpha^n}
\end{aligned} \tag{18}
$$

となることが分かります.ただし,

$$
(2n-1)!! = (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 1
$$

です.それでは,今日はこの辺で.お疲れ様でした.