運動群

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-04-23

古典的なユークリッド幾何学では，図形を移動すると言ったら，次の三つの基本的な移動方法を組み合わせるという意味でした．これをまとめて **合同変換** と呼びます．

1. 平行移動
2. 回転移動
3. 線対称移動

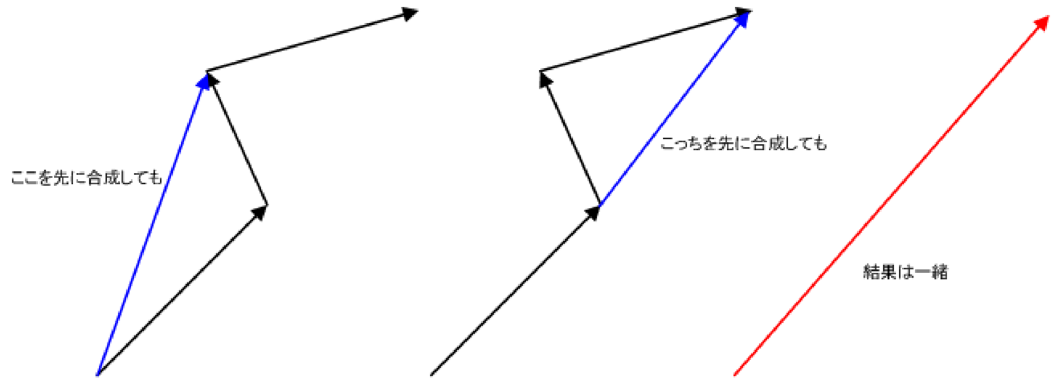
これらの移動方法は，以下に順に見ていくように群をなします．まとめて **運動群** と呼びます．運動群は，図形の移動に関する群です．

平行移動

まずは図形の平行移動が群をなすことを見てみましょう．

1. 異なる平行移動を連続的に行っても，やはりこれも一種の平行移動になります．ベクトルの加法を思い出してみましょう．つまり，全ての平行移動の仕方の集合は閉じています．
2. 結合則がなりたちます． 3 種類の平行移動を順番に行う場合，ベクトルの加法を思い出せば，どこから手をつけても良いことが分かります．

[*1] 結晶学では結晶格子の構造を考えるのに点群と言われる群を使います．点群も運動群も空間群の一種です．点群論には上記の 3 種の移動に加えて，反転，回映，回反などの操作も考えます．ここでは当面の間，点群論に踏み込む余裕がありません．点群に興味があってサイトにいらした方ゴメンナサイ m(_ _)m



3. 単位元があります．(動かさないことです．)
4. 逆元があります．(反対向きに平行移動することです．)

回転移動

次に，回転移動も群をなすことを見てみます．

1. 図形を連続的に回転させても，結果はやはり回転変換になります．(回転の中心は同じ点だとします．) つまり，全ての回転の仕方からなる群は閉じています．
2. 結合則がなりたちます．
3. 単位元があります．(回さないことです．)
4. 逆元があります．(反対向きに回すことです．)

線対称移動

線対称移動も群をなすことも確認します．(実は，群の定義 の例題８として，既に挙げてあるのですが，もう一度やります．) 公理 1. の前に，単位元の存在 3. を確認すると分かりやすいと思います．

1. 図形を線対称移動させたものを，もう一回線対称移動させると元の図形になります．これは単位元ですので，群に含まれます．
2. 結合則がなりたちます．
3. 単位元があります．(線対称移動させない＝なんにもしないことです．)
4. 線対称移動の操作 T の逆元は，T 自身です．

式で書くと，3. と 4. は次のように書けます．

$$T \cdot T = T^2 = I$$

$$T^{-1} = T$$

ある一本の線に対して，線対称移動は，$\{T, I\}$ という，位数がわずか 2 の群になります．

合同変換

ユークリッド幾何では，平行移動，回転，線対称移動の 3 つの操作を合わせて，**合同変換** といいます．合同変換全体の集合は群をなします．

補足：合同変換の行列表示

線形代数の復習になりますが，図形の合同変換は行列で表記することができます．実際に計算を行う場合に，行列表記が便利な場合があります．

合同変換によって，点 (x, y) が点 (X, Y) に移動されたことを，行列とベクトルで次のように書けます．

1. 回転変換 (それぞれ，z 軸，y 軸，x 軸まわりに角 θ 回転する変換)

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2. 平行移動 (x 軸方向へ a , y 軸方向へ b，z 方向へ c だけ平行移動)

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

四次の行列で書いても良い．

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. 対称移動 (xz 平面，yz 平面，xy 平面に関する面対称移動．それぞれの平面上で見たら，線対称移動)

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$