

平方完成の図形的イメージ

崎間@物理のかぎプロジェクト

査読中

2次方程式を解く際、「平方完成」という操作を行います。はじめて授業で習ったとき、どうも変形の本質というか、イメージが掴めなかった方も多いのではないのでしょうか。平方完成の“図形的イメージ”を捉えることを目標に、この記事を書きました。

平方完成とは

2次方程式を解くときに、「なんとかの二乗 = 定数」という形に変形することを、平方完成と呼びます。たとえば

$$x^2 + bx = c$$

という2次方程式を平方完成すると、

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

になります。この式変形の意味を、何とか図形的にイメージすることはできないでしょうか。

図形的意味

一般式ではイメージし辛いので、つぎのように具体的な2次方程式を考えます。

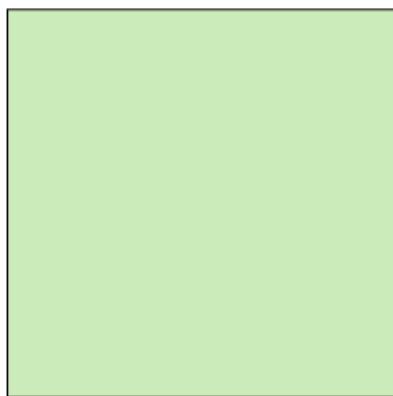
$$x^2 + 11x = 33 \tag{1}$$

この式の意味は「ある数を二乗したものと、ある数に11を掛けたものを足すと、33である」ということです。そして、方程式の解を求めるとは、「ある数」が具体的にいくらなのかを決めることです。式(1)をなんとか図形的に表したいのですが、どうしよう。そうだ、“2次”なのだから、面積に例えられないでしょうか。四角形の面積は、一辺掛ける一辺、という2次の問題です。特に正方形ならば、辺の長さの二乗、という問題になります。2次方程式を、正方形の面積を求める問題^{*1}に置き換えてみましょう。

^{*1} この図形的な方法は、アラビアのアル・クワリズミという数学者が考えたそうです。ちなみに、“アル・クワリズミ”は“アルゴリズム”の語源だとか。

正方形とその面積

まずは式 (1) の右辺を，正方形の面積として表現することにします．正方形の絵を描いておきます．



正方形全体の面積 = 33

残るは式 (1) の左辺を，正方形の辺の長さで表せれば，2 次方程式を図形的に表したことになります．しかし式 (1) の左辺は

$$x^2 + 11x$$

なので，正方形の辺の長さにする，と言ってもなんだか良くわかりません．しかしこれが x^2 だったらどうでしょう．この場合，辺の長さは x で良いですね．一辺の長さが x の正方形の面積は， x^2 ですからね．

$x^2 + 11x$ を「何とかの二乗」に近づけるため，つぎの式変形を行います．

$$x^2 + 11x = \left(x + \frac{11}{2}\right)^2 - \left(\frac{11}{2}\right)^2 \quad (2)$$

ひとまず，「何とかの二乗」に近づきました．マイナスが付いた項が出てくるのは，両辺の値を等しくするためです．式 (2) の右辺を式 (1) の左辺に代入してみましょう．

$$\left(x + \frac{11}{2}\right)^2 - \left(\frac{11}{2}\right)^2 = 33 \quad (3)$$

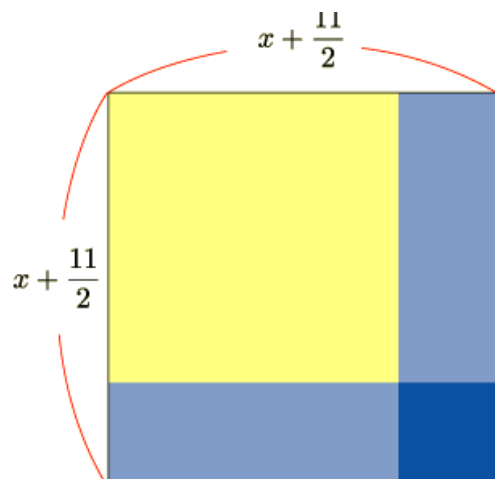
となります．

仮にマイナスの項を無視して考える

ここで一時的に，式 (3) においてマイナスの項を「なかったこと」にして考えてみると

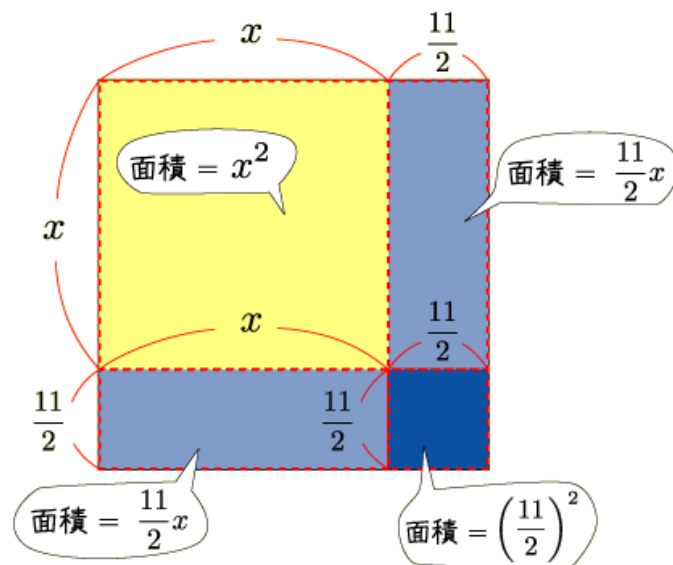
$$\left(x + \frac{11}{2}\right)^2 = 33$$

であり，この式は，図形的につぎの図で表せます．一辺の長さが $x + \frac{11}{2}$ の正方形ですね．



正方形全体の面積 = 33

色分けしているのにはちゃんと意味があります．図にもう少し情報を書き込んでみます．



正方形全体の面積 = 33

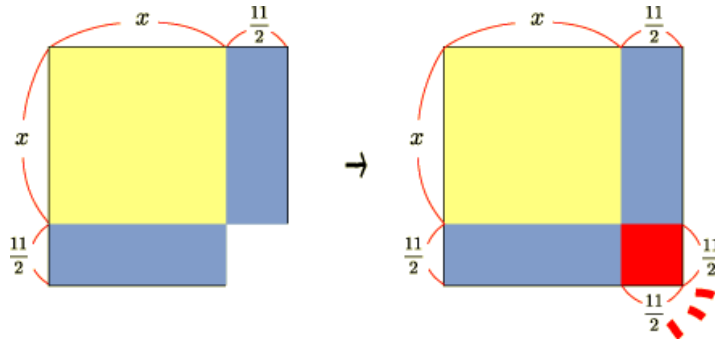
一辺の長さが $x + \frac{11}{2}$ であるという情報を元に，このように，全体を4つの四角形に分けることができます．

- 面積 x^2 の正方形が1つ
- 面積 $\frac{11}{2}x$ の長方形が2つ，
- 面積 $\left(\frac{11}{2}\right)^2$ の正方形が1つ

です．図の右下の，面積 $\left(\frac{11}{2}\right)^2$ の正方形に注目してください．

マイナスの項もちゃんと考える

先ほどの正方形は、一時的に式 (3) にあったマイナスの項 $(\frac{11}{2})^2$ を無視して、 $(x + \frac{11}{2})^2 = 33$ としたからこそ考えることができました。今度はきちんとマイナスの項も考えて見ましょう。上の図には $(\frac{11}{2})^2$ の項が出てきていましたね。これはつぎの図のように考えて良いはずです。



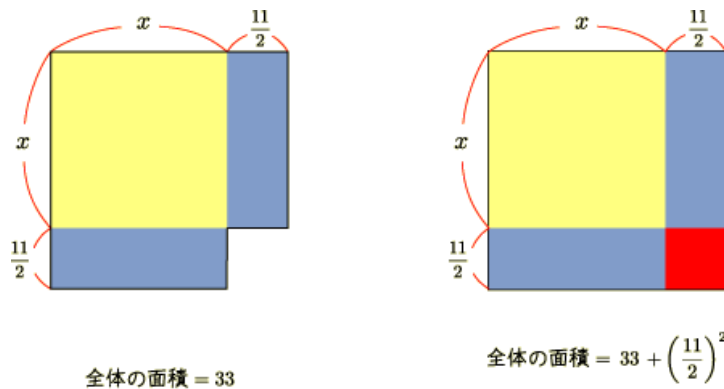
つまり、マイナスの項を無視するということは、同じものを足して打ち消した、ということなのです。

$$\left(x + \frac{11}{2}\right)^2 - \left(\frac{11}{2}\right)^2 = 33$$

を

$$\left(x + \frac{11}{2}\right)^2 = 33 + \left(\frac{11}{2}\right)^2 \quad (4)$$

としたのと同じことです。いまの場合、まるっきり無視したのではなく、左辺から引いた分を右辺に足しているのです。方程式の整合性は保たれています。しかし今度は、全体の面積に相当する右辺の値が増えてしまいました。これは、つぎの図のように考えます。



左側の「一部が欠けた正方形」の面積こそが、式 (1) の右辺に相当し、右側の「ちゃんとした正方形」が、式変形後の右辺に相当している、ということです。

まとめ

平方完成とは、このように正方形を完成させて、問題解決を簡単にすることだったのです

$$x^2 + 11x = 33$$

のように x^2 の項と x の項が別々だと難しいですが、

$$\left(x + \frac{11}{2}\right)^2 = 33 + \left(\frac{11}{2}\right)^2$$

と平方完成すると x は一箇所にまとまるので、問題を考えやすくなります*²。変形の必然性、意味が少しでも納得できれば記憶も定着しやすいですし、なるほど！と思えれば勉強が楽しいものになりますね。

*² 正方形の面積，というイメージは思い浮かべやすいですが，じゃあ面積が負の場合はどうなるんだろう，という疑問にもつながります．そこは割り切っておきましょう．