

三角関数の公式 1

Joh @物理のかぎプロジェクト

2006-01-15

加法定理，2倍角の公式，3倍角の公式，半角の公式，積和の公式，和積の公式を掲載します．2倍角の公式以降は，全て加法定理から導けるものです．丸暗記してもすぐに忘れます．簡単な導き方は書いてありますが，一度，自分でしっかりと計算して導き方を覚えましょう．

平方関係

一番目の式は，公式というよりは定義そのものです．

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

加法定理

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

2 倍角の公式

加法定理で $\alpha = \beta = \theta$ と置けば出てきます .

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

ここで $\tan \theta = t$ と置くと , 次のようにも表せます .

$$\sin 2\theta = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos 2\theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2t}{1 - t^2}$$

3 倍角の公式

加法定理で , $\alpha = \theta$, $\beta = 2\theta$ と置き , 2 倍角の公式を再び使えば導けます . もしくは , オイラーの関係式 $\exp^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ の両辺を 3 乗して , 実部と虚部に分ける方法も良いでしょう .

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\tan 3\theta = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}$$

半角の公式

2 倍角の公式から導けます .

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$\tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

積和の公式

この公式は、加法定理で $\sin(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$ を計算しておき、うまく足したり引いたりして導きます。

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \right)$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \left(\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \right)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \right)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \left(\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \right)$$

和積の公式

積和の公式で $\alpha = \frac{A+B}{2}$, $\beta = \frac{A-B}{2}$ と置けば導けます。

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

逆に、和積の公式で $\frac{A+B}{2} = \alpha$, $\frac{A-B}{2} = \beta$ と置けば積和の公式が得られます。