荷電粒子の運動による電磁場

CO @物理のかぎプロジェクト

執筆中

前の記事 では電荷 q をもった荷電粒子が，ある軌道 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0}(t)$ に沿って運動するとき，点 $\boldsymbol{r}$ の電磁場のポテンシャルは Liénard-Wiechert ポテンシャルで表されることを学びました．Liénard-Wiechert ポテンシャルは次のように書かれるのでした．

$$\phi = \left[\frac{q}{\kappa R}\right], \tag{1}$$

$$\boldsymbol{A} = \left[\frac{q\boldsymbol{u}}{c\kappa R}\right]. \tag{2}$$

ここで [ ] は遅延時間をとることを表しています．

この記事では Liénard-Wiechert ポテンシャルから，荷電粒子が運動しているときの電場，磁場を求めます．なお，このシリーズでは単位系として cgs 単位系を用いています．ご了承ください．

結果から

先は長いので，先に結果を載せておきます．次のような式を得ることを目指して進んでいきます．

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = q\left[\frac{(1-\beta^2)(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})}{\kappa^3 R^2}\right] + \frac{q}{c}\left[\frac{\boldsymbol{n}}{\kappa^3 R} \times (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\right] \tag{3}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = [\boldsymbol{n}(t') \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)] \tag{4}$$

ポテンシャルから電場を求める

まずポテンシャルから電場を求めることにしましょう．いま我々はゲージとしてローレンツゲージを選んでいます．したがって電場，磁場はスカラーポテンシャル ϕ，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を用いて次のように表されます．

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{6}$$

(5)，(6) にそれぞれ (1)，(2) を代入して計算してやれば，電場・磁場を求めることができます．まずは電場を求めることにしましょう．(5) に (1) を代入します．遅延時間を $t_{\mathrm{ret}} = t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0}(t')|}{c} = t'$ と表記することにします．電場は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \\
&= -\nabla\left(\frac{q}{\kappa\left(t'\right)R\left(t'\right)}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{q\boldsymbol{u}(t')}{c\kappa(t')R(t')}\right) \qquad (7)
\end{aligned}
$$

となります．ここで $\boldsymbol{u}(t')$，$\kappa(t')$，$\boldsymbol{R}(t')$，$R(t')$ は

$$
\boldsymbol{u}(t') = \frac{d\boldsymbol{r_0}(t')}{dt} \qquad (8)
$$

$$
\kappa(t') = 1 - \frac{1}{c}\boldsymbol{n}(t')\cdot\boldsymbol{u}(t') \qquad (9)
$$

$$
\boldsymbol{R}(t') = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}(t') \qquad (10)
$$

$$
R(t') = |\boldsymbol{R}(t')| \qquad (11)
$$

です．また，荷電粒子から観測者の向きの単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を次のように定義します．

$$
\boldsymbol{n}(t') = \frac{\boldsymbol{R}(t')}{R(t')} \qquad (12)
$$

準備

式 (7) の計算を進める前に，いくつかの計算をしておきます．あとで出てくるからです．

$\partial t'/\partial t$

まず $\frac{\partial t'}{\partial t}$ を計算します．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial t'}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(t - \frac{R(t')}{c}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial R(t')}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} \qquad (13)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial R(t')}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial t'}\left(\sqrt{\left(x-x_0\left(t'\right)\right)^2+\left(y-y_0\left(t'\right)\right)^2+\left(z-z_0\left(t'\right)\right)^2}\right) \\
&= \frac{-\left(x-x_0\left(t'\right)\right)\frac{dx_0(t')}{dt'} - \left(y-y_0\left(t'\right)\right)\frac{dy_0(t')}{dt'} - \left(z-z_0\left(t'\right)\right)\frac{dz_0(t')}{dt'}}{\sqrt{\left(x-x_0\left(t'\right)\right)^2+\left(y-y_0\left(t'\right)\right)^2+\left(z-z_0\left(t'\right)\right)^2}} \\
&= -\frac{\boldsymbol{R}(t')\cdot\boldsymbol{u}(t')}{R(t')} \\
&= -\boldsymbol{n}(t')\cdot\boldsymbol{u}(t') \qquad (14)
\end{aligned}
$$

となるので，(14) を (13) に代入して

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial t'}{\partial t} &= 1 + \frac{\boldsymbol{n}(t')\cdot\boldsymbol{u}(t')}{c}\frac{\partial t'}{\partial t} \\
\left(1 - \frac{\boldsymbol{n}(t')\cdot\boldsymbol{u}(t')}{c}\right)\frac{\partial t'}{\partial t} &= 1
\end{aligned}
$$

ゆえに (9) より

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{\kappa(t')}. \tag{15}$$

$\partial t'/\partial x$

つぎに $\frac{\partial t'}{\partial x}$ という量を計算します．

ここで一つ気をつけなければいけないのが $t' = t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0}(t')|}{c}$ なので，$r_0(t')$ の中の t' も x に依存していると言うことです．ややこしいですね (ノ◇≦．)

とにかくこれに気をつけて微分を実行する必要があります．

$$\begin{aligned}\frac{\partial t'}{\partial x} &= \left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right)_{\boldsymbol{r_0}} + \left(\frac{\partial t'(\boldsymbol{r_0}(t'))}{\partial x}\right)_{\boldsymbol{r}} \\ &= \left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right)_{\boldsymbol{r_0}} + \left(\frac{\partial t'\left(\boldsymbol{r_0}\left(t'\right)\right)}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}\right)_{\boldsymbol{r}}\end{aligned} \tag{16}$$

ここで

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right)_{\boldsymbol{r_0}} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0}(t')|}{c}\right)\right)_{\boldsymbol{r_0}} \\ &= \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{(x-x_0(t'))^2+(y-y_0(t'))^2+(z-z_0(t'))^2}\right)\right)_{\boldsymbol{r_0}} \\ &= -\frac{x-x_0(t')}{cR(t')} \\ &= -\frac{n_x(t')}{c}\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial t'(\boldsymbol{r_0}(t'))}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}\right)_{\boldsymbol{r}} &= \left(\frac{\partial}{\partial t'}\left(t - \frac{R(t')}{c}\right)\frac{\partial t'}{\partial x}\right)_{\boldsymbol{r}} \\ &= \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial R(t')}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}\right)_{\boldsymbol{r}} \\ &= \frac{\boldsymbol{n}(t')\cdot\boldsymbol{u}(t')}{c}\frac{\partial t'}{\partial x}\end{aligned} \tag{18}$$

したがって (17)，(18) より，(16) は

$$\left(1 - \frac{\boldsymbol{n}(t')\cdot\boldsymbol{u}(t')}{c}\right)\frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{n_x(t')}{c}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{n_x(t')}{c\kappa(t')}. \tag{19}$$

$(\partial/\partial t')\left((\kappa\left(t'\right)R\left(t'\right))\right)$

つぎに $\frac{\partial}{\partial t'}\left(\kappa\left(t'\right)R\left(t'\right)\right)$ を計算します．これが終われば準備は完了ですので頑張って下さい．p(´∇｀)q

$$\frac{\partial}{\partial t'}\left(\kappa\left(t'\right)R\left(t'\right)\right) = \frac{\partial\kappa(t')}{\partial t'}R(t') + \kappa(t')\frac{\partial R(t')}{\partial t'} \tag{20}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\kappa(t')}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial t'}\left(1-\frac{\boldsymbol{n}(t')\cdot\boldsymbol{u}(t')}{c}\right)\\
&= -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\boldsymbol{n}(t')}{\partial t'}\cdot\boldsymbol{u}(t')+\boldsymbol{n}(t')\cdot\frac{\partial\boldsymbol{u}(t')}{\partial t'}\right). \qquad (21)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\boldsymbol{n}(t')}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{R}(t')}{R(t')}\right)\\
&= \frac{\partial\boldsymbol{R}(t')}{\partial t'}\frac{1}{R(t')}-\boldsymbol{R}(t')\frac{1}{R(t')^2}\frac{\partial R(t')}{\partial t'}\\
&= -\frac{\boldsymbol{u}(t')}{R(t')}+\boldsymbol{n}(t')\frac{\boldsymbol{n}(t')\cdot\boldsymbol{u}(t')}{R(t')}\\
&= \frac{\boldsymbol{n}(t')\cdot\boldsymbol{u}(t')-\boldsymbol{u}(t')}{R(t')} \qquad (22)
\end{aligned}
$$

式 (22) より (21) は

$$
\frac{\partial\kappa(t')}{\partial t'} = -\frac{1}{c}\left(\frac{(\boldsymbol{n}(t')\cdot\boldsymbol{u}(t'))^2-u(t)^2}{R(t')}+\boldsymbol{n}(t')\cdot\dot{\boldsymbol{u}(t')}\right). \qquad (23)
$$

したがって (20) より

$$
\frac{\partial}{\partial t'}\left(\kappa(t')R(t')\right) = -\frac{1}{c}\left((\boldsymbol{n}(t')\cdot\boldsymbol{u}(t'))^2-u(t')^2+R(t')\left(\boldsymbol{n}(t')\cdot\dot{\boldsymbol{u}(t')}\right)\right)-\kappa(t')\left(\boldsymbol{n}(t')\cdot\boldsymbol{u}(t')\right) \qquad (24)
$$

となります.

まとめ

準備で計算した結果をまとめておきましょう.

$$
\frac{\partial R(t')}{\partial t'} = -\boldsymbol{n}(t')\cdot\boldsymbol{u}(t'), \qquad (14)
$$

$$
\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{\kappa(t')}, \qquad (15)
$$

$$
\frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{n_x(t')}{c\kappa(t')}, \qquad (19)
$$

$$
\frac{\partial\boldsymbol{n}(t')}{\partial t'} = \frac{\boldsymbol{n}(t')\cdot\boldsymbol{u}(t')-\boldsymbol{u}(t')}{R(t')} \qquad (22)
$$

$$
\frac{\partial}{\partial t'}\left(\kappa(t')R(t')\right) = -\frac{1}{c}\left((\boldsymbol{n}(t')\cdot\boldsymbol{u}(t'))^2-u(t')^2+R(t')\left(\boldsymbol{n}(t')\cdot\dot{\boldsymbol{u}(t')}\right)\right)-\kappa(t')\left(\boldsymbol{n}(t')\cdot\boldsymbol{u}(t')\right) \qquad (24)
$$

計算だっ

準備の計算だけで疲れてしまいました.. (; ´ r‘)

では実際に (7) を計算してみることにしましょう. (7) をもう一度書くと,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= -\nabla\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\\
&= -\nabla\left(\frac{q}{\kappa\left(t'\right)R\left(t'\right)}\right)-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{q\boldsymbol{u}(t')}{c\kappa(t')R(t')}\right) \qquad (7)
\end{aligned}
$$

でした.

$\nabla\phi$

まずは $\nabla\phi$ から片づけていくことにします．まずは x 成分を計算してみましょう

$$
\begin{aligned}
(\nabla\phi)_x &= \frac{\partial}{\partial}\left(\frac{q}{\kappa(t')R(t')}\right) \\
&= \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{q}{\kappa(t')R(t')}\right) \\
&= \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{-1}{\kappa(t')^2R(t')^2}\frac{\partial}{\partial t'}\left(\kappa(t')R(t')\right) \\
&= \frac{qn_x(t')}{c\kappa(t')^3R(t')^2}\frac{\partial}{\partial t'}\left(\kappa(t')R(t')\right) \qquad (25)
\end{aligned}
$$

同様にして y 成分，z 成分も計算できます．従って $\nabla\phi$ は

$$
\nabla\phi = \frac{q\boldsymbol{n}(t')}{c\kappa(t')^3R(t')^2}\frac{\partial}{\partial t'}\left(\kappa(t')R(t')\right) \qquad (26)
$$

$\partial\boldsymbol{A}/\partial t$

つづいて $\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$ を計算しましょう．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} &= \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t'} \\
&= \frac{1}{\kappa(t')}\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{q\boldsymbol{u}(t')}{c\kappa(t')R(t')}\right) \\
&= \frac{q}{c\kappa(t')}\left(\frac{\dot{\boldsymbol{u}(t')}}{\kappa(t')R(t')} - \frac{\boldsymbol{u}(t')}{\kappa(t')^2R(t')^2}\frac{\partial}{\partial t'}\left(\kappa(t')R(t')\right)\right) \\
&= \frac{q}{c\kappa(t')^3R(t')^2}\left(\kappa(t')R(t')\dot{\boldsymbol{u}}(t') - \boldsymbol{u}(t')\frac{\partial}{\partial t'}\left(\kappa(t')R(t')\right)\right) \qquad (27)
\end{aligned}
$$

いよいよ電場

さあ，これでやっと電場が計算できます．(26)，(27) より，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \\
&= -\frac{q\boldsymbol{n}(t')}{c\kappa(t')^3R(t')^2}\frac{\partial}{\partial t'}\left(\kappa(t')R(t')\right) - \frac{q}{c\kappa(t')^3R(t')^2}\left(\kappa(t')R(t')\frac{\dot{\boldsymbol{u}}(t')}{c} - \frac{\boldsymbol{u}(t')}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\left(\kappa(t')R(t')\right)\right) \\
&= -\frac{q}{c\kappa(t')^3R(t')^2}\left(\boldsymbol{n}(t')\frac{\partial}{\partial t'}\left(\kappa(t')R(t')\right) + \kappa(t')R(t')\dot{\boldsymbol{u}}(t') - \frac{\boldsymbol{u}(t')}{c}\frac{\partial}{\partial t'}\left(\kappa(t')R(t')\right)\right) \\
&= -\frac{q}{c\kappa(t')^3R(t')^2}\left(\left(\boldsymbol{n}(t') - \frac{\boldsymbol{u}(t')}{c}\right)\frac{\partial}{\partial t'}\left(\kappa(t')R(t')\right) + \kappa(t')R(t')\frac{\dot{\boldsymbol{u}}(t')}{c}\right)
\end{aligned}
$$

ここで (24) を代入してやると，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= \left[\frac{q}{\kappa^3R^2}\left(\left(\boldsymbol{n} - \frac{\boldsymbol{u}}{c}\right)\left(\frac{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u})^2}{c^2} - \frac{u^2}{c^2} + \frac{R}{c^2}\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{u}} + \frac{\kappa\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}}{c}\right) + \frac{\kappa R\dot{\boldsymbol{u}}}{c^2}\right)\right] \\
&= \left[\frac{q}{\kappa^3R^2}\left((\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\beta})\left((\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2 - \beta^2 + R\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}} + \kappa\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}\right) + \kappa R\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)\right] \qquad (28)
\end{aligned}
$$

となります．ここで $\boldsymbol{u}(t')/c = \boldsymbol{\beta}(t')$ とおきました．(28) を展開して整理します．このとき分子の $\kappa(t') = 1 - \boldsymbol{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')$ も展開します．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) =& q\left[\frac{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^2 - \beta^2 + (1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}}{\kappa^3 R^2}\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\right] \\ &+ \frac{q}{c}\left[\frac{\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta}) + (1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\dot{\boldsymbol{\beta}}}{\kappa^3 R^2}\right] \qquad (29)\end{aligned}$$

ここで，第二項の分子について考えてみます．突然ですが次のような外積を計算してみます．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}\times\left((\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right) &= \boldsymbol{n}\times\left(\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right) \\ &= \boldsymbol{n}\times\left(\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right) - \boldsymbol{n}\times\left(\boldsymbol{\beta}\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right) \\ &= \boldsymbol{n}\left(\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}\right) - \dot{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\left(\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}\right) + \dot{\boldsymbol{\beta}}\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}) \\ &= \left(\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta}) + \dot{\boldsymbol{\beta}}\,(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}) \qquad (30)\end{aligned}$$

式 (30) は (29) の第二項の分子と同じです．第一項を整理し，第二項に (30) を適用すると次式になります．

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = q\left[\frac{(1-\beta^2)(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})}{\kappa^3 R^2}\right] + \frac{q}{c}\left[\frac{\boldsymbol{n}}{\kappa^3 R}\times(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right] \qquad (3)$$

これが点電荷が運動しているときの電場です．e=(・o・*) フゥ

磁場を求める

磁場は (6) から求めることができます．電場の計算と同じようにやればよいので，ここでは省略します．結果だけ載せておきます．

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = [\boldsymbol{n}(t')\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)] \qquad (31)$$