続々々・ベクトルの回転

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2010-10-24

特定の向きを向いた剛体が，オイラー角と呼ばれる三つの回転を行った後の状態は，ある一つの軸まわりの回転で，同じ向きを向けることができます．その回転軸と回転の大きさを求めてみよう．というのが，今回の記事です．ベクトルの回転，続ベクトルの回転，続々ベクトルの回転 の続編です．

オイラー角

オイラー角は，次の三つの行列の積で表されます．この三回の回転で，どんな向きでも向くことができます．詳しくは，剛体のオイラー角でのハミルトニアン の慣性主軸の所をご覧ください．

$$\begin{aligned}K &= R_{z''}(\psi)R_{y'}(\theta)R_z(\phi)\\ &= \begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi\cos\psi-\sin\phi\sin\psi & \cos\theta\sin\phi\cos\psi+\cos\phi\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi\\ -\cos\theta\cos\phi\sin\psi-\sin\phi\cos\psi & -\cos\theta\sin\phi\sin\psi+\cos\phi\cos\psi & \sin\theta\sin\psi\\ \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{1}$$

これと，今までこのシリーズで出てきた原点を通る軸周りの任意の大きさ α の回転行列,

$$\begin{aligned}K &= \boldsymbol{nn}+\cos\alpha(I-\boldsymbol{nn})+\sin\alpha\begin{pmatrix}0 & -n & m\\ n & 0 & -l\\ -m & l & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}l^2+\cos\alpha(m^2+n^2) & lm(1-\cos\alpha)-n\sin\alpha & ln(1-\cos\alpha)+m\sin\alpha\\ lm(1-\cos\alpha)+n\sin\alpha & m^2+\cos\alpha(n^2+l^2) & mn(1-\cos\alpha)-l\sin\alpha\\ ln(1-\cos\alpha)-m\sin\alpha & mn(1-\cos\alpha)+l\sin\alpha & n^2+\cos\alpha(l^2+m^2)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2}$$

これらが等しいとするのです．ここで，式 (1),(2) のトレース（対角和）を取ります．$l^2+m^2+n^2=1$ に注意すると,

$$\mathrm{tr}K = 1+2\cos\alpha = (1+\cos\theta)(1+\cos(\phi+\psi)\ )-1 \tag{3}$$

よって,

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{1}{2}(1+\cos\theta)(1+\cos(\phi+\psi)\ )-1 \\ &= 2\cos^2(\frac{\theta}{2})\cos^2\frac{\phi+\psi}{2}-1 \end{aligned} \tag{4}$$

となります．ただし，恒等式 $1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$ を用いました．l,m,n を求める為に対称成分の差を取ります．

$$\begin{aligned}K_{32}-K_{23} &= 2l\sin\alpha \\ &= \sin\theta(\sin\phi-\sin\psi)\end{aligned} \tag{5}$$

よって,

$$l = \frac{1}{2\sin\alpha}\sin\theta(\sin\phi-\sin\psi) \tag{6}$$

同様に，m,n についても,

$$m = \frac{-1}{2\sin\alpha}\sin\theta(\cos\phi+\cos\psi) \tag{7}$$

$$n = \frac{-1}{2\sin\alpha}(1+\cos\theta)\sin(\phi+\psi) \tag{8}$$

と求められます．$0\le\theta\le\pi$，$-\pi\le\phi,\psi\le\pi$ ですから,

ここで，$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}\ge 0$ を用いて,

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \sqrt{1-\cos^2\alpha} \\ &= \sqrt{-4\cos^4\frac{\theta}{2}\cos^4\frac{\phi+\psi}{2}+4\cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\phi+\psi}{2}} \\ &= \begin{cases} 2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi+\psi}{2}\sqrt{1-\cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\phi+\psi}{2}}\ge 0 & (\text{when} -\pi\le\phi+\psi\le\pi) \\ -2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi+\psi}{2}\sqrt{1-\cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\phi+\psi}{2}}\ge 0 & (\text{when} -2\pi\le\phi+\psi\le-\pi\ ,\ \pi\le\phi+\psi\le 2\pi)\end{cases}\end{aligned} \tag{9}$$

と，計算できます．そして，三角関数の和積の公式と半角の公式[*1] を用いてやると,

$$\begin{aligned}l &= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\times 2\sin\frac{\phi-\psi}{2}\cos\frac{\phi+\psi}{2}}{\pm 4\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi+\psi}{2}\sqrt{1-\cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\phi+\psi}{2}}} \\ &= \frac{\pm\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi-\psi}{2}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\phi+\psi}{2}}}\end{aligned} \tag{10}$$

[*1] 一応書いておきます．$\sin A-\sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$ と，$\cos A+\cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ と，$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ を用いました．

$$m = \frac{\mp \sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\phi-\psi}{2}}{\sqrt{1-\cos^2\dfrac{\theta}{2}\cos^2\dfrac{\phi+\psi}{2}}} \tag{11}$$

$$n = \frac{\mp \cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\phi+\psi}{2}}{\sqrt{1-\cos^2\dfrac{\theta}{2}\cos^2\dfrac{\phi+\psi}{2}}} \tag{12}$$

となり，（ただし，複号同順で，式 (9) の符号と一致させます.）それなりにきれいな形になりました.

以上，回転の公式の対応の検証でした．今日は，ここまで.