ブラケットや線形演算子の複素共役

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2007-04-05

前の記事は，線形演算子 です．次の記事は，固有値と固有ベクトル です．

線形演算子のエルミート共役

ケットベクトルは，物理的性質を変えずに複素数倍することができるので，線形演算子は複素数の値を持ちます．よって線形演算子は，運動量や位置などの複素関数になっています．どんな線形演算子が実数物理変数に対応するのか，議論を進めねばなりません．まずブラ $\langle P|\alpha$ に対応するケットベクトルについて考えます．このベクトルは $\langle P|$ に反線形[*1] に依存し，つまり $|P\rangle$ に線形に依存しています．その結果，このケットにはある演算子が作用したものと考えられます．その演算子を α のエルミート共役といい，$\bar{\alpha}$ で表します．行列で表すと複素共役をとってさらに転置したものです．結局，$\langle A|\alpha$ は $\bar{\alpha}|A\rangle$ と対になるわけです．

ここで，前の記事に書いた式を持ってきます．それは $\langle B|A\rangle = \overline{\langle A|B\rangle}$ です．この式の $\langle A|$ を $\langle P|\alpha$ に，$|A\rangle$ を $\bar{\alpha}|P\rangle$ で置き換えると，

$$\langle B|\bar{\alpha}|P\rangle = \overline{\langle P|\alpha|B\rangle} \tag{1}$$

となります．ここで $|B\rangle$ や $|P\rangle$，α は任意です．

式 (1) で α を $\bar{\alpha}$ に置き換えると，

$$\langle B|\bar{\bar{\alpha}}|P\rangle = \overline{\langle P|\bar{\alpha}|B\rangle} = \overline{\overline{\langle P|\alpha|B\rangle}} = \langle P|\alpha|B\rangle$$

となり，これはどんな P にも成り立つので，$\langle B|\bar{\bar{\alpha}} = \langle B|\alpha$ これもどんな B についても成り立つので，$\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$ よって，ある線形演算子のエルミート共役のエルミート共役は，元の演算子に等しいことが分かりました．この性質によって，エルミート共役は，複素数にとっての複素共役と同じように振舞います．またこの性質から，線形演算子のエルミート共役は，物理変数の複素共役に対応しているという解釈をします．そして線形演算子のエルミート共役のことを，複素共役線形演算子と呼ぶこともあります．特別な場合ですが，エルミート共役が，元の演算子と一致することがあります．これをエルミート行列といいます．これは実数物理変数に一致すると解釈し，実線形演算子と呼ばれることがあります．ブラベクトルとケッ

[*1] 反線形とは，一方が c 倍されると，もう一方は $\bar{c}$ 倍される関係のことを言います．

トベクトル で，すこし触れましたが，二つの演算子は和を作れるので元の演算子と共役な演算子の平均をとって実数部を取り出せます．このように実数部と虚部に分けることができるので，英語では “conjugate imaginary” ではなく “conjugate complex” を用い区別します．

演算子の和や積の共役は，どうなるか見てみましょう．

$$\overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta}$$

が演算子の和の定義,

$$\{\alpha+\beta\}|A\rangle=\alpha|A\rangle+\beta|A\rangle$$

の共役をとってやれば，成り立つことが分かります．次に積ですが，$\langle B|A\rangle=\overline{\langle A|B\rangle}$ に
$\langle B|=\langle Q|\bar{\beta}$，$|A\rangle=\bar{\alpha}|P\rangle$，$\langle A|=\langle P|\alpha$，$|B\rangle=\beta|Q\rangle$ を代入すると，

$$\langle Q|\bar{\beta}\bar{\alpha}|P\rangle=\overline{\langle P|\alpha\beta|Q\rangle}=\langle Q|\overline{\alpha\beta}|P\rangle$$

二つ目の等号は式 (1) を用い変形しました．これも $|P\rangle$ と $\langle Q|$ が任意な為,

$$\bar{\beta}\bar{\alpha}=\overline{\alpha\beta} \tag{2}$$

と結論できます．

共役な線形演算子から得られる議論

1．共役な演算子に関する，いままでの結果から得られる重要な例を示します．線形演算子 ξ と η を実線形演算子とした時，二つの積 $\xi\eta$ は実線形演算子ではありません．

例えば，二次正方行列で表されるエルミート演算子の積は[*2],

$$\begin{pmatrix} a & re^{i\theta} \\ re^{-i\theta} & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & Re^{i\gamma} \\ Re^{-i} & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+rRe^{i(\theta-\gamma)} & aRe^{i\gamma}+rye^{i\theta} \\ bRe^{-i\gamma}+xre^{-i\theta} & by+rRe^{-i(\theta-\gamma)} \end{pmatrix}$$

となり，実線形演算子ではありません．これは古典力学との重要な違いです．

2．しかしながら，$\xi\eta+\eta\xi$ や $i(\xi\eta-\eta\xi)$ は実数です．

3．また ξ と η が交換可能であることは，$\xi\eta$ が実数である為の必要十分条件です．証明は虚部 $i(\xi\eta-\eta\xi)$ がゼロになることについて考えれば明らかです．

4．さらには，ξ が実数の時，ξ^n は実数です．ただし，n は自然数です．

5．三つ以上の演算子の共役については,

$$\overline{\alpha\beta\gamma}=\overline{\alpha(\beta\gamma)}=\overline{\beta\gamma}\bar{\alpha}=\bar{\gamma}\bar{\beta}\bar{\alpha} \tag{3}$$

などと二つの関係に持ち込んでやれば，容易にｎ個の場合に拡張できます．

6．前に「ブラとケットのテンソル積」の節において，$|A\rangle\langle B|$ は線形演算子だといいました．これに左から $\langle P|$ を作用させると，$\langle P|A\rangle\langle B|$ が得られます．この複素共役をとると

$$\overline{|A\rangle\langle B|}|P\rangle=\overline{\langle P||A\rangle\langle B|}=\overline{\langle P|A\rangle\langle B|}=\overline{\langle P|A\rangle}|B\rangle=\langle A|P\rangle|B\rangle=|B\rangle\langle A|P\rangle$$

[*2] 後で別の記事として書きますが，線形演算子は正方行列で表すことができます．

よって，

$$\overline{|A\rangle\langle B|} = |B\rangle\langle A| \tag{4}$$

ここまで複素共役な演算子について，いくつかのルールを得ました．式 (1)，(2) ，(3)，(4) です．それと $\langle P|\alpha$ の共役は $\bar{\alpha}|P\rangle$ というルールもそうです．これらを含めてルールを一般化します．それは，「ブラやケットや線形演算子のいくつかの積の集まりの共役は，それぞれの要素の共役をとったものを逆順に並べたものに等しい.」というものです.

最後に定理を一つ

ここで線形演算子に関する定理を一つ挙げます．これでこの記事は終わりです.

定理

実線形演算子 ξ について任意の P，自然数 m にたいし

$$\xi^m|P\rangle = 0 \tag{5}$$

が成り立つならば，$\xi|P\rangle = 0$ である.

証明

まず $m = 2$ の場合を示します．式 (5) に $\langle P|$ を左から掛けて，$\langle P|\xi^2|P\rangle = 0$ が成り立ちます．$\xi|P\rangle$ とその共役なブラの積であることが分かります．$|A\rangle = 0$ の時に限り $\langle A|A\rangle = 0$ でしたから，$\xi|P\rangle = 0$ であると分かります．次に $m > 2$ の場合を証明します．これは $\xi^{m-2}|P\rangle = |Q\rangle$ と置くと，式 (5) は $\xi^2|Q\rangle = 0$ となります．ここで先ほど得た $m = 2$ の場合を適用し $\xi|Q\rangle = 0$ が得られます．これはつまり $\xi^{m-1}|P\rangle = 0$ ということなので，これで一次次数が下がった式が得られたわけです．同様に次数下げを行って

$$\xi^{m-2}|P\rangle = 0, \xi^{m-3}|P\rangle = 0, \cdots, \xi|P\rangle = 0$$

が示せます．こうして証明は完了します．（証明終）