力の等価変換

pulsar @物理のかぎプロジェクト

2009-XX-XX

質点の力学ではすべての運動はニュートンの運動の３法則で計算できると説明されていますが，剛体の力学ではある点の回りのモーメントの計算が必要になります．そのためには，まずモーメントの計算では力が束縛ベクトルである（大きさと向きが同じでも作用点によって働きが異なる）ことを再認識しなければなりません．ここでは，作用点を明示した束縛ベクトルの表現と計算例を示します．

等価な力とは？

簡単な例として，質量 m_1, m_2 の質点を軽い棒でつないだ下図の剛体を考えます．$\boldsymbol{F}_i, \boldsymbol{F}_{ik}$ はそれぞれ質量 m_i の質点に働く外力，質量 m_k の質点から質量 m_i の質点に働く内力です．

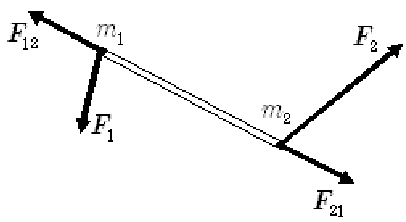

図１　２質点をつないだ剛体

質量 m_1, m_2 の質点の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ とすると，内力は

$$\boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} = \boldsymbol{0}$$

$$(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{F}_{12} = \boldsymbol{0}$$

という性質をもっているので，運動方程式

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}_i + \sum_{k \neq i} \boldsymbol{F}_{ik}$$

から

$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t^2} + m_2 \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$$

$$\boldsymbol{r}_1 \times m_1 \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t^2} + \boldsymbol{r}_2 \times m_2 \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t^2} + = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2$$

という内力を含まない式が得られ，この微分方程式を解くことによって $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ を求めることができます[*1]．剛体の運動を考えるときモーメントを計算するのは，前記の $(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{F}_{12} = \boldsymbol{0}$ という制約によるものです．

この剛体に働く力がつり合っているということは $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{0}$ であることを意味します．このことから, $\boldsymbol{F}_1, \cdots, m, \cdots, F_m, -\boldsymbol{F}_{m+1}, \cdots, -\boldsymbol{F}_n$ がつり合っているとき，すなわち

$$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{F}_i = \sum_{i=m+1}^{n} \boldsymbol{F}_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_{i=m+1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$$

であるとき, $\boldsymbol{F}_1, \cdots, \boldsymbol{F}_m$ と $\boldsymbol{F}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ は等価であると定義します．ここで $\boldsymbol{r}_i$ は $\boldsymbol{F}_i$ の作用点の位置ベクトルを表しています．このとき，任意の $\boldsymbol{r}_0$ について

$$\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_0) \times \boldsymbol{F}_i = \sum_{i=m+1}^{n} (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_0) \times \boldsymbol{F}_i$$

となることを確認してください．

束縛ベクトルの表現

$\boldsymbol{r}_i$ を作用点とする力 $\boldsymbol{F}_i$ を $\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{r}_i)$ と表しても，通常は $\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{r}_i) = \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{r}_k)$ は $\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{r}_i)$ と $\boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{r}_k)$ の大きさと向きが等しいと解釈されます．このため，新しい記号 $\boldsymbol{F}_i[\boldsymbol{r}_i]$ を用いて

$$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{F}_i[\boldsymbol{r}_i] = \sum_{i=m+1}^{n} \boldsymbol{F}_i[\boldsymbol{r}_i]$$

の意味を

$$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{F}_i = \sum_{i=m+1}^{n} \boldsymbol{F}_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_{i=m+1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$$

[*1] 重心 $\boldsymbol{r}_\mathrm{G}$ を $(m_1 + m_2)\boldsymbol{r}_\mathrm{G} = m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2$ で定義すると，質点の運動方程式と類似の $(m_1 + m_2)\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_\mathrm{G}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$ が得られます．

で定義します．この定義からただちに $(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{F}_0$ ならば $\boldsymbol{F}_0[\boldsymbol{r}_1]=\boldsymbol{F}_0[\boldsymbol{r}_2]$ （力はその作用線を移動しても働きは変わらない）という性質が導かれます．

二つの力の合力

与えられた $\boldsymbol{F}_1[\boldsymbol{r}_1]$, $\boldsymbol{F}_2[\boldsymbol{r}_2]$ に対して

$$\boldsymbol{F}_1[\boldsymbol{r}_1]+\boldsymbol{F}_2[\boldsymbol{r}_2]=\boldsymbol{F}_3[\boldsymbol{r}_3]$$

となる $\boldsymbol{F}_3[\boldsymbol{r}_3]$ が存在するとき，$\boldsymbol{F}_3[\boldsymbol{r}_3]$ を $\boldsymbol{F}_1[\boldsymbol{r}_1]$, $\boldsymbol{F}_2[\boldsymbol{r}_2]$ の合力といいます．$\boldsymbol{F}_1[\boldsymbol{r}_1]$, $\boldsymbol{F}_2[\boldsymbol{r}_2]$ が同一平面上にあれば，$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{r}_1\neq\boldsymbol{r}_2$ の場合を除いて，合力が存在します．

平行でない２力

$\boldsymbol{F}_1[\boldsymbol{r}_1]$, $\boldsymbol{F}_2[\boldsymbol{r}_2]$ が平行でないときは，これらのベクトルは１次独立ですから $\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2=a\boldsymbol{F}_1-b\boldsymbol{F}_2$ となる a, b が存在し，

$$\boldsymbol{F}_3=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$$

$$\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_1-a\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{r}_2-b\boldsymbol{F}_2$$

と表せます（ $\boldsymbol{r}_3$ は作用線の交点）．

例えば $\boldsymbol{F}_1[\boldsymbol{r}_1]=(F,0)[(2r,0)]$, $\boldsymbol{F}_2[\boldsymbol{r}_2]=(0,F)[(0,2r)]$ のとき，

$$\begin{pmatrix} 2r & -2r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$$

ですから，$\boldsymbol{F}_3[\boldsymbol{r}_3]=(F,F)[(0,0)]$ となります．ただし，$(0,0)$ は剛体上にないので，これと等価な $(F,F)[(r,r)]$ を合力とする方が自然でしょう．

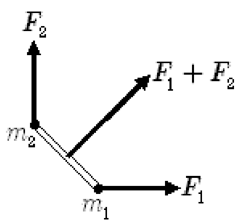

図 2　$(F,0)[(2r,0)]+(0,F)[(0,2r)]$

平行な２力

$\boldsymbol{F}_2=c\boldsymbol{F}_1\quad(c\neq-1)$ であれば，

$$\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_2=(\boldsymbol{r}_1+c\boldsymbol{r}_2)\times\boldsymbol{F}_1$$

ですから，

$$\boldsymbol{F}_3 = (1+c)\boldsymbol{F}_1$$

$$\boldsymbol{r}_3 = \frac{\boldsymbol{r}_1 + c\boldsymbol{r}_2}{1+c}$$

です．

例えば $\boldsymbol{F}_1[\boldsymbol{r}_1] = (0, -F)[(0,0)]$, $\boldsymbol{F}_2[\boldsymbol{r}_2] = (0, -2F)[(3r, 0)]$ のとき，

$$\boldsymbol{r}_3 = \frac{(0,0) + 2(3r,0)}{1+2} = (2r, 0)$$

で，$\boldsymbol{F}_3[\boldsymbol{r}_3] = (0, -3F)[(2r, 0)]$ となります．

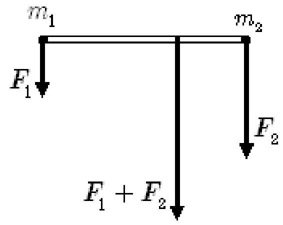

図 3　$(0, -F)[(0,0)] + (0, -2F)[(3r, 0)]$

偶力

$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{r}_1 \neq \boldsymbol{r}_2$ のとき，$\boldsymbol{F}_1[\boldsymbol{r}_1]$, $\boldsymbol{F}_2[\boldsymbol{r}_2]$ の合力は存在しません．このような力の組 $\boldsymbol{F}_1[\boldsymbol{r}_1]$, $\boldsymbol{F}_2[\boldsymbol{r}_2]$ を偶力といい，以下では $\boldsymbol{F}_0[\boldsymbol{r}_1] - \boldsymbol{F}_0[\boldsymbol{r}_2]$ を $\boldsymbol{F}_0[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2]$ と略記します．

偶力のモーメントが自由ベクトルであること，すなわち任意の $\boldsymbol{r}_0$ について

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{r}_2 \times (-\boldsymbol{F}_0) = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0) \times \boldsymbol{F}_0 + (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0) \times (-\boldsymbol{F}_0)$$

が成立することや，偶力 $\boldsymbol{F}_0[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2]$ と偶力 $c^{-1}\boldsymbol{F}_0[c(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2), \boldsymbol{0}]$ のモーメントが等しいこと等が容易に確かめられます．

3 次元の力の等価変換

$\boldsymbol{F}_1[\boldsymbol{r}_1]$, $\boldsymbol{F}_2[\boldsymbol{r}_2]$ が同一平面上になければこれらの合力は存在しませんが，任意の $\boldsymbol{r}_0$ について

$$\boldsymbol{F}_1[\boldsymbol{r}_1] + \boldsymbol{F}_2[\boldsymbol{r}_2] = \boldsymbol{F}_3[\boldsymbol{r}_0] + \boldsymbol{F}_4[\boldsymbol{r}_4, \boldsymbol{r}_0]$$

が成立するように $\boldsymbol{F}_3$, $\boldsymbol{F}_4$, $\boldsymbol{r}_4$ を選ぶことができます．

例えば，$\boldsymbol{F}_i[\boldsymbol{r}_i]$ を

$$\boldsymbol{F}_i[\boldsymbol{r}_i] = \boldsymbol{F}_i[\boldsymbol{r}_0] + \boldsymbol{F}_i[\boldsymbol{r}_i] - \boldsymbol{F}_i[\boldsymbol{r}_0] = \boldsymbol{F}_i[\boldsymbol{r}_0] + \boldsymbol{F}_i[\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_0]$$

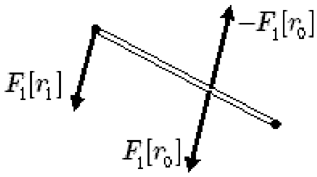

図 4　$\boldsymbol{F}_i[\boldsymbol{r}_i]$ の等価変換

と変形して加算した式

$$\sum_{i=1}^{2}\boldsymbol{F}_i[\boldsymbol{r}_i]=\left(\sum_{i=1}^{2}\boldsymbol{F}_i\right)[\boldsymbol{r}_0]+\sum_{i=1}^{2}\boldsymbol{F}_i[\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{r}_0]$$

の右辺第 2 項は偶力の和ですから，自由ベクトルであるこれらのモーメントの和

$$\boldsymbol{N}=\sum_{i=1}^{2}(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{F}_i$$

は容易に計算でき，$(\boldsymbol{r}_4-\boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{F}_4=\boldsymbol{N}$ を満足する $\boldsymbol{F}_4$, $\boldsymbol{r}_4$ が求められます[*2].

上式で $\boldsymbol{r}_0$ が任意の点でよかったことを思い出すと，多数の 3 次元ベクトル $\boldsymbol{F}_1[\boldsymbol{r}_1],\cdots,\boldsymbol{F}_n[\boldsymbol{r}_n]$ についても

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i[\boldsymbol{r}_i]=\boldsymbol{F}_{n+1}[\boldsymbol{r}_0]+\boldsymbol{F}_{n+2}[\boldsymbol{r}_{n+2},\boldsymbol{r}_0]$$

となる $\boldsymbol{F}_{n+1}$, $\boldsymbol{F}_{n+2}$, $\boldsymbol{r}_{n+2}$ が存在することが分かります.

一様な密度の剛体に働く力

重力

$\boldsymbol{F}_0[\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{F}_0[\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}_2=2\boldsymbol{F}_0[\boldsymbol{r}_0$ ですから，密度が一様で，点 $\boldsymbol{r}_0$ に関して対称な剛体に働く重力は，重心を作用点とし，大きさと向きが力の総和に等しい力と等価であることが分かります.

例えば，両端が $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ にある質量 M の棒に働く重力は，棒を $2n$ 個の微小領域に等分して点対称な位置にある微小領域の対を考えると，各対の合力の作用点はすべて棒の中心になり，これらの合力の総和が棒に働く重力と等しくなります.

固定点から受ける力

剛体が固定点の回りを運動しているとき，通常は固定点回りの角運動量の時間微分が固定点回りの外力のモーメントの総和に等しいとして運動方程式を解きます．この場合，固定点に働いている力を計算する

[*2] $\boldsymbol{N}$ が $\boldsymbol{F}_3$ と平行でないとき，$\boldsymbol{F}_3$ と平行な偶力の成分を $\boldsymbol{F}_3$ に加算し（合力が存在します)，これと $\boldsymbol{F}_3$ と直交する偶力（モーメントは $\boldsymbol{F}_3$ と平行）との和に変形できます.

必要はありませんが，上記の説明と関連付けるために固定点 $\boldsymbol{r}_0$ に働く力が $\boldsymbol{F}_0[\boldsymbol{r}_0]$, その他の外力（重力は重心に集中しているとして扱います）が $\boldsymbol{F}_i[\boldsymbol{r}_i]$ $(i=1,\cdots,n)$ である場合について考えましょう．

この剛体に働く力は

$$\boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}] = \left(\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{F}_i\right)[\boldsymbol{r}] + \left(\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{F}_i\right)[\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}]$$

等価ですから，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$ とおくと $\boldsymbol{r}_0$ 回りの角運動量を求める方程式から $\boldsymbol{F}_0$ が消えてしまいます．つまり，$\boldsymbol{F}_0$ を求める必要がなければ運動量を求める方程式は考えなくてよいのです．

数値例について

「二つの力の合力」では，数値例に $\boldsymbol{F}_1[\boldsymbol{r}_1]=(0,-F)[(0,0)]$, $\boldsymbol{F}_2[\boldsymbol{r}_2]=(0,-2F)[(3r,0)]$ のような表現を用いました．この点について補足します．

通常，物理量を表す文字は単位を含んでいます．例えば，速さ v で時間 t だけ移動したときの移動距離は vt であるといったとき， v や t の単位は自由に選べます．$v=72\mathrm{km/h}$, $t=3\mathrm{s}$ ならば $vt=60\mathrm{m}$ です．なお，速さ v で 1s 間移動したときの移動距離は v ではなく $(1\mathrm{s})v$ です[*3]．上記の $(0,-2F)[(3r,0)]$ のような数値例は $(0,-2\mathrm{N})[(3\mathrm{m},0)]$ のような表現より分かりやすいと思います．

あとがき

ここで述べた内容はすべて私が学生のときに学んだ教科書 [1]（古書，ISBN なし）に書かれています．既知の事柄を珍奇な記号を使って書き換えただけだと感じた方が多いと思いますが，モデリング，記法，プログラミング等に関心のある高校生・大学生諸君のために所属学会の研究会で発表した内容を補足し，数値例も付け加えて紹介しました．教科書・参考書を超えて自分でいろいろ工夫してほしいというのが筆者の願いです．

[*3] $0\mathrm{km/h}=0\mathrm{m/s}$ だから $v=0$ の右辺に単位は不要ですが，温度 $T=0°\mathrm{C}$ の単位は省略できません．（蛇足ですが，熱容量や比熱に使われる温度差の $1°\mathrm{C}$ は 274.15K でなく 1K です．[J] でない $[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}]$, 無次元でない [m/m] 等，単位については苦し紛れの区別がいくつかあります．）