点と面の距離（非正方行列の逆行列についての一つの提案）

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2010-12-28

正方行列でない行列の逆行列とは，どんなものか．という疑問の答えの一つがこれです．注意として，世間一般で言われるランクが n より小さい n 次正方行列に対する「一般化逆行列」とは，異なるものの様です．

2 つのベクトルの張る平面

三次元空間内で，原点を通る二本のベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)^T$[*1] と $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)^T$ で張られる平面 $(x,y,z)^T=s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$ と，点 P $\boldsymbol{r}=(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)^T$ との距離 X が最短距離を示す時の s と t の値を求めます．つまり，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

が最も近づく時を考えます．

それには，距離 X^2 が最小値を取る時を考えればよいです．つまりは，s,t の二次式なので，平方完成を行います．実際に計算してみると，

$$\begin{aligned} X^2 &= (x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2 \\ &= (a_1s+b_1t-x_0)^2+(a_2s+b_2t-y_0)^2+(a_3s+b_3t-z_0)^2 \\ &= (a_1^2+a_2^2+a_3^2)s^2+2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)st+(b_1^2+b_2^2+b_3^2)t^2 \\ &\quad -2(a_1x_0+a_2y_0+a_3z_0)s-2(b_1x_0+b_2y_0+b_3z_0)t+(x_0^2+y_0^2+z_0^2) \\ &= |\boldsymbol{a}|^2s^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}st+|\boldsymbol{b}|^2t^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}s-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}t+|r|^2 \\ &\equiv \alpha s^2+2\beta st+\gamma t^2-2\delta s-2\varepsilon t+\zeta \end{aligned} \tag{2}$$

最後の行で，ギリシャ文字 $\alpha,\beta,\cdots,\zeta$ を定義しました．順番に，アルファ，ベータ，ガンマ，デルタ，イ

[*1] 右上の T は，転置を表します．

プシロン，ゼータと読みます．さらに計算を続けると，

$$\begin{aligned}X^2 &= \alpha s^2 + 2\beta st + \gamma t^2 - 2\delta s - 2\varepsilon t + \zeta \\ &= \alpha(s + \frac{\beta t - \delta}{\alpha})^2 - \frac{(\beta t - \delta)^2}{\alpha} + \gamma t^2 - 2\varepsilon t + \zeta \\ &= \alpha(s + \frac{\beta t - \delta}{\alpha})^2 + (\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha})t^2 + 2(\frac{\beta\delta}{\alpha} - \varepsilon)t + \zeta - \frac{\delta^2}{\alpha} \\ &= \alpha(s + \frac{\beta t - \delta}{\alpha})^2 + (\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha})\left(t + \frac{\frac{\beta\delta}{\alpha} - \varepsilon}{\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}}\right)^2 \zeta - \frac{\delta^2}{\alpha} - \frac{(\frac{\beta\delta}{\alpha} - \varepsilon)^2}{\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}} \\ &= \alpha(s + \frac{\beta t - \delta}{\alpha})^2 + (t + \frac{\beta\delta - \varepsilon\alpha}{\alpha\gamma - \beta^2})^2 + \zeta - \frac{\delta^2(\alpha\gamma - \beta^2)}{\alpha(\alpha\gamma - \beta^2)} - \frac{\beta^2\delta^2 - 2\alpha\beta\delta\varepsilon + varepsilon^2\alpha^2}{\alpha(\alpha\gamma - \beta^2)} \\ &= \alpha(s + \frac{\beta t - \delta}{\alpha})^2 + (t + \frac{\beta\delta - \varepsilon\alpha}{\alpha\gamma - \beta^2})^2 + \zeta - \frac{\alpha\varepsilon^2 - 2\beta\delta\varepsilon + \gamma\delta^2}{\alpha\gamma - \beta^2} \end{aligned} \tag{3}$$

と，この様になります．最後の行の最初から二つの項は θ をベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の成す角として，$\alpha = |\boldsymbol{a}|^2 \neq 0$ かつ，$\alpha\gamma - \beta^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(1 - \cos^2\theta) = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 \neq 0$ の時（つまり，$\boldsymbol{a} \neq 0$ かつ，ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の成す角が 0 や π でない時）に，ゼロにすることができて，その時の s, t が知りたいのです．

s と t の決定

ここで，s と t を決定する（二乗内の値をゼロにする）行列を書きだすと，

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha\gamma - \beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \\ \varepsilon\alpha - \beta\delta \end{pmatrix} \tag{4}$$

逆に解いて，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} &= \frac{1}{\alpha(\alpha\gamma - \beta^2)} \begin{pmatrix} \alpha\gamma - \beta^2 & -\beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \\ \varepsilon\alpha - \beta\delta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha(\alpha\gamma - \beta^2)} \begin{pmatrix} (\alpha\gamma - \beta^2)\delta - (\varepsilon\alpha - \beta\delta)\beta \\ \alpha(\varepsilon\alpha - \beta\delta) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha\gamma - \beta^2} \begin{pmatrix} \gamma\delta - \beta\varepsilon \\ \alpha\varepsilon - \beta\delta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

ベクトルでの表記

ここから，ベクトルを使って表現することにします．

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2} \begin{pmatrix} |\boldsymbol{b}|^2(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{r}) \\ |\boldsymbol{a}|^2(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{r}) - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a})(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}) \end{pmatrix} \tag{6}$$

ここで，ベクトルの演算を練習しておきます．スカラー三重積は，

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} \tag{7}$$

と言うように，スカラー積とベクトル積の入れ替えができます．そして，ベクトル三重積は，

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \tag{8}$$

ですから，これと新たなベクトル $\boldsymbol{d}$ とのスカラー積をとって，

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \tag{9}$$

これと，式 (6) の右辺の上段を見比べて，

$$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r} \tag{10}$$

下段は，これの $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を入れ替えたものだから，式 (6) は，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}s\\ t\end{pmatrix}&=\frac{1}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2}\begin{pmatrix}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}\\ (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2}\begin{pmatrix}-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}\\ (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{11}$$

となります．そして，

$$\boldsymbol{p}\equiv\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\ a_3b_1-a_1b_3\\ a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}l\\ m\\ n\end{pmatrix} \tag{12}$$

であります．ここで，もう一つの外積の行列での表現，

$$-\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{b}=-\begin{pmatrix}0 & -n & m\\ n & 0 & -l\\ -m & l & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix} \tag{13}$$

を用います．これは，三次元の列ベクトルなので，$\boldsymbol{r}$ との内積を取る為に，転置します．

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}&=-\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & n & -m\\ -n & 0 & l\\ m & -l & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -n & m\\ n & 0 & -l\\ -m & l & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{14}$$

式 (6) の下段は，同様に $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を入れ替えればよく，以上をまとめて書けば，

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\ t\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{pmatrix} \tag{15}$$

の距離が最小になる解は,

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2}\begin{pmatrix} -(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r} \\ (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -n & m \\ n & 0 & -l \\ -m & l & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

ただし,

$$\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

であり，その時の最短距離 X^2 は，式 (3) の一番最後の行から,

$$X^2 = \zeta - \frac{\alpha\varepsilon^2 - 2\beta\delta\varepsilon + \gamma\delta^2}{\alpha\gamma - \beta^2}$$
$$= |\boldsymbol{r}^2| - \frac{|\boldsymbol{a}|^2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r})^2 - 2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) + |\boldsymbol{b}|^2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})^2}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2}$$

となります．以上でこの記事は終わりです．これより次元が高い場合も，いつか計算してみたいです．それでは，今日はこの辺で.