

ラグランジュの運動方程式

崎間@物理のかぎプロジェクト

2002-03-19

解析力学には、ラグランジュの運動方程式なるものが登場します。どういうものかという

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

というものなのですが、これ、いったい何なのでしょう。実は、最終的にはニュートンの運動方程式と同じものなのです。ここでは、ラグランジュの方程式がニュートンの運動方程式と同等であることを（特殊な場合に限って）簡単に示してみます。

ニュートンの運動方程式

あるポテンシャル U から力を受ける 2 次元 (x, y) 平面での質点を考えます。まず、ニュートンの運動方程式ですが

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y \quad (1)$$

という形をしています。ここで

$$\ddot{x}$$

は、位置 x を時間 t で 2 階微分したもの、すなわち加速度を意味します。また、ドットが一つなら 1 階微分です。つまり

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

です。この表記はどんな変数の時間微分も簡潔に書けるため便利で、よく使われます。また、左辺の力 F ですが、ここではポテンシャルから受ける力を考えているので、ポテンシャル U の偏微分

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

で表せます。したがって、ニュートンの運動方程式 (1) は

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad (2)$$

と書いても同じ事です．これを変形してラグランジュの方程式にもって行くことができれば，とりあえずこの状況でニュートンの運動方程式とラグランジュの方程式が同等であることを示せます．

ラグランジアン

質点の運動エネルギーを T ，ポテンシャルエネルギーを U と書くことにしますと，これらの差 $T - U$ なる量はラグランジアンと呼ばれます．運動エネルギーはおなじみの

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \\ &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \end{aligned}$$

で表わせます．これは \dot{x} と \dot{y} の関数です．関数の変数がなんであるかをハッキリさせたいときは，

$$T = T(\dot{x}, \dot{y})$$

のように関数名の後に変数を丸括弧で括ってくっつけておきます．ポテンシャルエネルギーの具体的な形は様々ですが，

$$U = U(x, y)$$

というふうに x と y の関数であると表すことができます．したがってラグランジアン L は

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= T(\dot{x}, \dot{y}) - U(x, y) \\ &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(x, y) \end{aligned}$$

です．運動エネルギー T は \dot{x} と \dot{y} にのみ依存し，ポテンシャルエネルギー U は x と y にのみ依存している形になっているのがポイントです．このことから，ラグランジアン L を \dot{x} ， \dot{y} で偏微分したものは T を \dot{x} ， \dot{y} で偏微分したものに等しくなります．つまり

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$$

です．同様に，「ラグランジアンを x, y で偏微分したもの」は「 $-U$ を x, y で偏微分したもの」に等しくなります．

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

ニュートンの運動方程式とラグランジュの運動方程式

いま示そうとしていることは，ニュートンの運動方程式（再掲）

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad (2)$$

がラグランジュの方程式と同等であるということです。 x についての運動方程式

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad (3)$$

に着目してみましょう。式 (3) の左辺の $m\ddot{x}$ というのは $m\dot{x}$ を時間 t で 1 階微分したものです。 $m\dot{x}$ はラグランジアン L を \dot{x} で偏微分したものでしたから

$$m\ddot{x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \quad (4)$$

と表すことができます。式 (3) の右辺は、ラグランジアン L を x で偏微分したもののそのものです。

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial x} \quad (5)$$

式 (4), (5) を式 (3) の運動方程式に代入すると

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x}$$

移項して

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

となり、 y の式についても同様ですから、運動方程式は結局

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

という形に書き直せることとなります。これは最初に示したラグランジュの方程式です。

ラグランジュの方程式の利点

以上の例（位置に比例するポテンシャルと、運動エネルギーを考えた例）で、ニュートンの運動方程式とは別にラグランジュの方程式なるものを導入できることを示しました。それらは結局、同等なものになっています（そうじゃなきゃ困ります）。

さて、わざわざ別の基礎方程式を導入したからには、なにか利点があるはずですが、それは、加速度を直接方程式に含めなくてよい、という点が大きいと思われます。運動方程式を立てる座標系は、直線座標の場合もあれば、曲線であったり角度を変数としている場合もあります。普通、時間についての 2 階微分である加速度を、このように様々な変数で表すのは難しい作業です。

ラグランジュの方程式はラグランジアンさえ分かれば立てることができます。そしてラグランジアンに加速度は含まれていません。ラグランジュの方程式はどのような座標系でも同じ形になるところに利点があります。