# クーロンポテンシャルのフーリエ変換

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2011-06-14

結構，有名な積分だと思います．ときどき解法を忘れてしまうので，自分用にメモです．

問題の積分は，

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{|\boldsymbol{r}|} d\boldsymbol{r} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{exp(-i(k_x x + k_y y + k_z z))}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ dxdydz
\end{aligned}
\tag{1}
$$

式 (1) の第二行を見るとなんとも物騒な積分ですが，この積分は次の極座標を用いれば簡単になります．

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\phi \\
y &= r\sin\theta\sin\phi \\
z &= r\cos\theta
\end{aligned}
$$

ちなみに $|\boldsymbol{r}| = r$ です．一応初めての方もいらっしゃると思うので，この変換のヤコビアン（ヤコビの行列式：積分の微小体積要素の変換式）は，お馴染み（？）の

$$
\begin{aligned}
dxdydz &= \begin{vmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\theta} & \frac{dx}{d\phi} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\theta} & \frac{dy}{d\phi} \\ \frac{dz}{dr} & \frac{dz}{d\theta} & \frac{dz}{d\phi} \end{vmatrix} drd\theta d\phi \\
&= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} drd\theta d\phi \\
&= (r^2\sin^3\theta\cos^2\phi + r^2\cos^2\theta\sin\theta\cos^2\phi \\
&+ r^2\sin^3\theta\sin^2\phi + r^2\cos^2\theta\sin\theta\sin^2\phi)drd\theta d\phi \\
&= (r^2\sin^3\theta + r^2\cos^2\sin\theta)drd\theta d\phi \\
&= r^2\sin\theta drd\theta d\phi
\end{aligned}
\tag{2}
$$

です．よって，

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{|\boldsymbol{r}|} d\boldsymbol{r} \\
&= \int_0^{\infty} dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{e^{-ikr\cos\theta}}{r} r^2\sin\theta
\end{aligned}
\tag{3}
$$

ここで，$\cos\theta = t$ , $-\sin\theta d\theta = dt$ と変数変換すると，

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{|\boldsymbol{r}|} d\boldsymbol{r} \\
&= \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\phi \left( \int_{-1}^{1} r e^{-ikrt} dt \right) \\
&= \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\phi \left[ r \frac{e^{-ikrt}}{-ikr} \right]_{-1}^{1} \\
&= \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\phi \left[ \frac{e^{-ikrt}}{ik} \right]_{1}^{-1} \\
&= \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{ik} \left( e^{ikr} - e^{-ikr} \right) \\
&= \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\phi \frac{2}{k} \sin(kr)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

ここでいかにも物理（not 数学的な意味で）らしい手法を用います．$\lim_{\delta\to 0} e^{-\delta r} (= 1)$ を被積分関数に掛けるのです．すると，無限遠での値が収束し，

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{\delta\to 0} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{ik} e^{-\delta r} (e^{ikr} - e^{-ikr}) \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{ik} \lim_{\delta\to 0} \left[ \frac{e^{(ik-\delta)r}}{ik-\delta} - \frac{e^{(-ik-\delta)r}}{-ik-\delta} \right]_0^\infty \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{ik} \lim_{\delta\to 0} \left[ \frac{0-1}{ik-\delta} + \frac{0-1}{ik+\delta} \right] \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{ik} \left( \frac{-2}{ik} \right) \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \frac{2}{k^2} \\
&= \frac{4\pi}{k^2}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

となります．よって，

$$
\int \frac{e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{|\boldsymbol{r}|} d\boldsymbol{r} = \frac{4\pi}{k^2} \tag{6}
$$

が言えました．

それでは今日はこの辺で，お疲れ様でした．