ビオ・サバールの法則とその応用

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2007-02-16

円電流の作る磁場をビオ・サバールの法則を用いて直接積分して求めます.

導入

電流は流れるとき，必ず磁場を伴って流れています．それを表す法則は，ふたつありまして，一方は「アンペールの法則」，もう一方は，「ビオ・サバールの法則」と呼ばれています．ここでは，ビオ・サバールの法則を使って，簡単な例に適用してみます.

ビオ・サバールの法則

原点に微小な電流要素 $I d\boldsymbol{s}$ を考えます．ただし I は電流の大きさで，微小方向ベクトルは電流の向きを表す方向ベクトル $\boldsymbol{n}$ を用いて，$d\boldsymbol{s} = ds\boldsymbol{n}$ と表される．この微小電流要素が，位置 $\boldsymbol{r}$ に作る磁場 $d\boldsymbol{B}$ は,

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{d\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{d\boldsymbol{s}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{|\boldsymbol{r}|^2} \tag{1}$$

となります．ただし $\hat{\boldsymbol{r}}$ は位置ベクトル方向を向いた単位ベクトルとしました.

円電流が作る磁場

いまｘｙ平面内に半径 a の円電流を考えます．この円電流が作る磁場をビオ・サバールの法則で計算してみます.

$\boldsymbol{r_0} = (a\cos\theta, a\sin\theta, 0)$ にある微小電流が (この時，微小接線ベクトル $d\boldsymbol{s} = ds(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$ です) $\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (r\cos\phi, r\sin\phi, z)$ の位置に（最後は円筒座標を使いました）作る磁場は，式 (1) より,

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{d\boldsymbol{s}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0}|^3}$$

今,

$$d\boldsymbol{s}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -ds\sin\theta & ds\cos\theta & 0\\ x-a\cos\theta & y-a\sin\theta & z\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}z\cos\theta\\ z\sin\theta\\ a-y\sin\theta-x\cos\theta\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix}z\cos\theta\\ z\sin\theta\\ a-r\cos(\theta-\phi)\end{pmatrix}ds$$

で,

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0}|^2=|\boldsymbol{r}|^2+|\boldsymbol{r_0}|^2-2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r_0}=r^2+z^2+a^2-2ra\cos(\theta-\phi)$$

です．これを用いて，まずｚ方向の磁場 B_z を求めます．微小距離 $ds=ad\theta$ と置けるのでｊの積分にすることができて,

$$B_z=\int dB_z=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a-r\cos(\theta-\phi)}{(r^2+z^2+a^2-2ra\cos(\theta-\phi)\ )^{\frac{3}{2}}}ad\theta$$

同様にｘ方向，ｙ方向も書くと,

$$B_x=\int dB_x=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{z\cos\theta}{(r^2+z^2+a^2-2ra\cos(\theta-\phi)\ )^{\frac{3}{2}}}ad\theta$$

$$B_y=\int dB_y=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{z\sin\theta}{(r^2+z^2+a^2-2ra\cos(\theta-\phi)\ )^{\frac{3}{2}}}ad\theta$$

です．おそらくこの積分は解けません.

円電流が作る磁場（原点では）

解けないとは言いましたが，二つの特別な場合を計算してみます.

まず $r=0$ の時は簡単です．まずｚ方向について見てみます.

$$B_z=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a-r\cos(\theta-\phi)}{(r^2+z^2+a^2-2ra\cos(\theta-\phi)\ )^{\frac{3}{2}}}ad\theta=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}d\theta=\frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

となり，またｘ方向，ｙ方向は対称性から０になります.

さらに特別な場合，コイルの円の中心 $(z=0)$ では $\boldsymbol{B}=(0,0,\frac{\mu_0 I}{2a})$ となります.

円電流が作る磁場（十分に遠方では）

十分に遠方 $|\boldsymbol{r}|>>|\boldsymbol{r_0}|$ では，分母を近似することができます.

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0}|^2}=\frac{1}{(r^2+z^2+a^2-2ra\cos(\theta-\phi)\ )^{\frac{3}{2}}}=(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\ (1-\frac{2ar}{r^2+z^2}\cos(\theta-\phi)+\frac{a^2}{r^2+z^2})^{-\frac{3}{2}}$$

ここで $\frac{a^2}{r^2+z^2}$ は二次の微小量なので無視し，テイラー展開 $(1+x)^\alpha=1+\alpha x$ を用いると,

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0}|^2}=(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(1-\frac{2ar}{r^2+z^2}\cos(\theta-\phi))^{-\frac{3}{2}}=(r^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(1+\frac{3}{2}\ \frac{2ar}{r^2+z^2}\cos(\theta-\phi))$$

となります．これを用いて z 方向成分を求めると，

$$
\begin{aligned}
B_z &= \frac{\mu_0 I}{4\pi(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}(a-r\cos(\theta-\phi))(1+\frac{3ar}{r^2+z^2}\cos(\theta-\phi))ad\theta \\
&= \frac{\mu_0 Ia}{4\pi(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}r(-\cos(\theta-\phi)+\frac{a}{r})(1+\frac{3ar}{r^2+z^2}\cos(\theta-\phi))d\theta \\
&= \frac{\mu_0 Ia}{4\pi(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}r(-1+\frac{3a^2}{r^2+z^2})\cos(\theta-\phi)+a-\frac{3ar^2}{r^2+z^2}\cos^2(\theta-\phi)d\theta \\
&= \frac{\mu_0 Ia}{4\pi(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}[ar(\frac{1}{r}-\frac{3r}{2(r^2+z^2)})(\theta-\phi)]_0^{2\pi} \\
&= \frac{\mu_0 Ia}{4\pi(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\{2\pi ar(\frac{r^2+z^2}{r(r^2+z^2)}-\frac{\frac{3}{2}r^2}{r(r^2+z^2)})\} \\
&= \frac{\mu_0 Ia}{2(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(ar\frac{z^2-\frac{1}{2}r^2}{r(r^2+z^2)}) \\
&= \frac{\mu_0 Ia^2}{2(r^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}(z^2-\frac{1}{2}r^2)
\end{aligned}
$$

ふう疲れた，とにかくこうなるわけですよ．まだ，x 方向と y 方向が残っています．でも安心してください．x 方向は $(a-r\cos(\theta-\phi))$ を $z\cos\theta$ で置き換えるだけです．

$$
\begin{aligned}
B_x &= \frac{\mu_0 I}{4\pi(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}z\cos\theta(1+\frac{3ar}{r^2+z^2}\cos(\theta-\phi))ad\theta \\
&= \frac{\mu_0 Ia}{4\pi(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}z\cos\theta(1+\frac{3a}{r^2+z^2}r\cos(\theta-\phi))d\theta \\
&= \frac{\mu_0 Ia}{4\pi(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}z\cos\theta(1+\frac{3a}{r^2+z^2}(x\cos\theta+y\sin\theta)d\theta \\
&= \frac{\mu_0 Ia}{4\pi(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}z(\cos\theta+\frac{3ax}{r^2+z^2}\cos^2\theta+\frac{3ax}{r^2+z^2}\sin\theta\cos\theta)d\theta \\
&= \frac{\mu_0 Ia}{4\pi(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}[z\frac{3ax}{2(r^2+z^2)}\theta]_0^{2\pi} \\
&= \frac{3\mu_0 Ia^2xz}{4(r^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}
\end{aligned}
$$

y 方向についてはこれの x を y で，y は x で置き換えればいいので，

$$
\begin{aligned}
B_y &= \frac{\mu_0 I}{4\pi(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}z\sin\theta(1+\frac{3ar}{r^2+z^2}\cos(\theta-\phi))ad\theta \\
&= \frac{3\mu_0 Ia^2yz}{4(r^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}
\end{aligned}
$$

まとめると，

$$
\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 Ia^2}{(r^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}xz \\ \frac{3}{4}yz \\ \frac{3}{4}z^2-\frac{1}{4}(x^2+y^2+z^2)\end{pmatrix}
$$

であり，成分としてまとめると，

$$
B_n = \frac{3\mu_0 Ia^2}{4(r^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}(x_nx_3-\frac{1}{3}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\delta_{3n}) \qquad (n=1,2,3)
$$

x_1, x_2, x_3 は，それぞれ x, y, z をあらわし，$i = 1, 2, 3$ $j = 1, 2, 3$ にたいし

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1(when\ i = j) \\ 0(otherwise) \end{cases}$$

となり，これはクロネッカーのデルタという名前です.