三重対角行列の特性多項式

クロメル@物理のかぎプロジェクト

2010-10-24

三重対角行列の特性多項式を求める漸化式を求めてみます．
まず，三重対角行列 A を書きます．

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

単位行列を I として，この行列の特性多項式を求めます．つまり，$|\lambda I - A|$ を求めます．縦線での括弧は，行列式を表します．$f_n(\lambda)$ を次のように定義します．

$$f_n(\lambda) \equiv \det \lambda I - A = \det \begin{pmatrix} \lambda - \alpha_1 & -\beta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\gamma_1 & \lambda - \alpha_2 & -\beta_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_2 & \lambda - \alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda - \alpha_{n-1} & -\beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\gamma_{n-1} & \lambda - \alpha_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

すると，一番下の行（横ベクトル）のラプラス展開によって，次のような漸化式が得られます．

$$\begin{aligned} f_n(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} \lambda - \alpha_1 & -\beta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\gamma_1 & \lambda - \alpha_2 & -\beta_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_2 & \lambda - \alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda - \alpha_{n-1} & -\beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\gamma_{n-1} & \lambda - \alpha_n \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - \alpha_n) f_{n-1} - (-\gamma_{n-1}) \det \begin{pmatrix} \lambda - \alpha_1 & -\beta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\gamma_1 & \lambda - \alpha_2 & -\beta_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_2 & \lambda - \alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda - \alpha_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\gamma_{n-2} & -\beta_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

ここで，最後の式で第二項は，最後の列（縦ベクトル）で展開すると，f_{n-2} と $-\beta_{n-1}$ の積で表現できまして，

$$f_n(\lambda) = (\lambda - \alpha_n) f_{n-1} - \beta_{n-1}\gamma_{n-1} f_{n-2} \tag{4}$$

こうして，うまく漸化式が立てられました．実際に計算してみると，$f_0(\lambda) = 1$ とすれば，うまく計算のつじつまが合いまして，

$$f_0(\lambda) = 1 \tag{5}$$

$$f_1(\lambda) = \lambda - \alpha_1 \tag{6}$$

$$f_2(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2) - \beta_1\gamma_1 \tag{7}$$

$$f_3(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_3) - \beta_1\gamma_1(\lambda - \alpha_3) - \beta_2\gamma_2(\lambda - \alpha_1) \tag{8}$$

と，この様に次々特性多項式が求まっていきます．それでは，今日はこの辺で．